

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 9. ISOMETRÍAS O MOVIMIENTOS II.

1. Sea $\mathcal{R} = \{P; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ un sistema de referencia ortonormal (con respecto al producto escalar usual) en el plano afín $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$. Consideremos los puntos de coordenadas $A = (1, 0)_{\mathcal{R}}$, $B = (0, -1)_{\mathcal{R}}$, $C = (2, 2)_{\mathcal{R}}$ y $D = (-2, -2)_{\mathcal{R}}$.

- a) ¿Existe alguna traslación T en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ tal que $T(A) = B$ y $T(C) = D$?
- b) ¿Existe alguna simetría axial S en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ tal que $S(A) = B$ y $S(C) = D$? ¿Es única? En el caso de respuestas positivas, calcula los elementos geométricos de S .

2. Sean $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}; e_1, e_2\}$ una referencia ortonormal y $f : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ un giro de ángulo $\pi/2$ y centro un punto en la recta $x + y = 1$.

- a) Escribe la matriz de la aplicación lineal asociada a f .
- b) Escribe la expresión en coordenadas de f respecto de \mathcal{R} .
- c) Calcula la imagen por f del punto $(1, 1)$.
- d) Describe geoméricamente las imágenes de $(1, 1)$ por todos los giros de ángulo $\pi/2$ y centro un punto en la recta $x + y = 1$.

3. Sea $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ la afinidad cuyas ecuaciones respecto al sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}; e_1, e_2, e_3\}$ son

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Prueba que es una isometría, clasifícala y describe sus elementos geométricos.

4. Sea $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ la isometría cuyas ecuaciones respecto al sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}; e_1, e_2, e_3\}$ son

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Clasifica esta isometría y describe sus elementos geométricos.

5. Considera las isometrías $f_j(X) = a_j + AX$ con

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 7 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Estudia cada uno de estos movimientos indicando sus elementos geométricos.