

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 7. ESPACIO AFÍN III. APLICACIONES AFINES. DISTANCIA ENTRE VARIETADES LINEALES.

Aplicaciones afines.

1. Calcula las ecuaciones de la homotecia $f: \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ tal que $f(1, 1) = (4, 2)$ y $f(-1, 0) = (-2, -1)$, si existe.
2. Calcula las ecuaciones de la afinidad $T: \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ que cumple $T(1, 1) = (2, 3)$, $T(3, 2) = (3, 8)$ y $T(2, 3) = (1, 7)$, si existe.
3. a) Sean $r + 1$ puntos $\{p_0, p_1, \dots, p_r\}$ de un espacio afín \mathbb{A} de dimensión n . Llamemos $(x_{kj})_{0 \leq j \leq n}$ a las coordenadas de cada punto p_k en una referencia baricéntrica \mathcal{R} . Demuestra que, si denotamos por $[p_0 p_1 \dots p_r]$ la mínima variedad lineal que contiene a los puntos p_0, p_1, \dots, p_r , entonces se tiene que

$$\dim([p_0 \dots p_r]) + 1 = \text{rg}(M),$$

siendo

$$M = \begin{pmatrix} x_{00} & \cdots & x_{r0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{0n} & \cdots & x_{rn} \end{pmatrix}.$$

b) Si en el punto anterior tenemos que $r = n$, comprueba que, para que los $n + 1$ puntos sean afinmente independientes, es necesario y suficiente que $\det(M) \neq 0$.

4. Comprueba que las aplicaciones afines son, exactamente, aquellas que conservan los baricentros. Es decir, demuestra que, si \mathbb{A}_1 y \mathbb{A}_2 son espacios afines, entonces $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ es una aplicación afín si y sólo si, para cada familia finita de puntos $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{A}_1$ y cada familia de escalares μ_1, \dots, μ_r tales que $\sum_{j=1}^r \mu_j = 1$, se cumple que

$$f\left(\sum_{j=1}^r \mu_j a_j\right) = \sum_{j=1}^r \mu_j f(a_j).$$

5. Sean \mathbb{A}_1 y \mathbb{A}_2 espacios afines y sean $r + 1$ puntos (p_0, p_1, \dots, p_r) afinmente independientes de \mathbb{A}_1 . Demuestra que para cada lista (q_0, q_1, \dots, q_r) de $r + 1$ puntos de \mathbb{A}_2 , existe una única aplicación afín $f: [p_0 p_1 \dots p_r] \rightarrow \mathbb{A}_2$ tal que $f(p_j) = q_j$ para cada $j = 0, \dots, r$.

6. En \mathbb{A}^3 , consideramos los puntos

$$\begin{aligned} A &= (1, 1, 0), \quad B = (2, 0, 2), \quad C = (1, 2, \alpha), \quad D = (3, 4, -1), \\ A' &= (2, 1, 0), \quad B' = (2, 2, 1), \quad C' = (1, 1, 0), \quad D' = (3, 0, 0), \end{aligned}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Halla los valores de α para los que existe una aplicación afín $f: \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ tal que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ y $f(D) = D'$.

7. En \mathbb{A}^3 y con respecto a un sistema de referencia ortonormal, halla las ecuaciones de la simetría ortogonal con respecto al plano Π de ecuación $x + y + z = 1$.
8. En \mathbb{A}^3 y con respecto a un sistema de referencia ortonormal, halla las ecuaciones de la simetría ortogonal con respecto a la recta de ecuaciones $x - y = 2$, $x + z = 3$.

Distancia entre variedades lineales.

9. En el espacio euclídeo de dimensión 3, calcula la distancia entre las rectas r y s que vienen dadas en un sistema de referencia ortonormal por las siguientes ecuaciones implícitas:

$$r : \begin{cases} x - y = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2z = -1 \end{cases} .$$

Halla un punto $p \in r$ y un punto $q \in s$ tales que $d(r, s) = d(p, q)$. ¿Son únicos los puntos p y q ?

10. En el espacio euclídeo de dimensión 4, calcula la distancia entre las variedades lineales L_1 y L_2 que vienen dadas en un sistema de referencia ortonormal por las siguientes ecuaciones implícitas:

$$L_1 : \begin{cases} x + z + t = 1 \\ y - z - t = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad L_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ y - z - 3t = 3 \end{cases} .$$

Halla puntos $p \in L_1$ y $q \in L_2$ tales que $d(L_1, L_2) = d(p, q)$. ¿Son únicos esos puntos p y q ?

11. Halla una fórmula, en función de α y β , para calcular la distancia entre las rectas del espacio afín \mathbb{A}^3 con su estructura euclídea usual:

$$r := (1, 0, 1) + \langle (1, \alpha, 0) \rangle \quad \text{y} \quad s := (1, 1, 2) + \langle (1, 1, \beta) \rangle .$$

12. En \mathbb{R}^3 , considera el producto escalar cuya matriz en la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Calcula la distancia del punto $(1, 1, -2)$ al plano que pasa por los puntos de coordenadas cartesianas $a = (1, -1, 1)$, $b = (1, 1, 1)$ y $c = (2, -1, 2)$ en la referencia $\{O; \mathcal{B}\}$.