ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 5. Espacio afín i

1. Sea S el conjunto de puntos (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ que satisfacen la condición $2x_1 + x_2 - x_3 = 3$. Demuestra, usando la definición, que S es una variedad lineal de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

2. Demuestra que un subconjunto $H \neq \emptyset$ del espacio afín $\mathbb{A} = (A, V, \varphi)$ es una variedad lineal si y sólo si, para todo par de puntos p y q de H, la variedad lineal (recta) $L_{p,q} = p + \mathfrak{L}\{\varphi(p, q)\}$ está contenida en H.

3. Sea $T := \cup_{n\in\mathbb{N}}\{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} : x_1 + x_2 = n\}$. ¿Es el conjunto T una variedad lineal de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$?

4. En $\mathbb{A}^3$, considera los conjuntos

$$B = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 1\} \quad \text{y} \quad C = \{(x, y, z) : x - y + 2z = 2 \text{ y } x - z = 1\}.$$

(i) Demuestra que B y C son variedades lineales (es decir, escribe cada una de ellas de la forma $p+W$, donde $p \in A$ y W subespacio de $V = \mathbb{R}^3$; en realidad p es un punto cualquiera en la variedad y W es el espacio generado por sus vectores directores).

(ii) Determina si B y C se cortan, son paralelas, o se cruzan. Si se cortan, halla su intersección.

5. En $\mathbb{A}^4$, considera los conjuntos

$$B = \{(x, y, z, w) : x = 1, y = 2\} \quad \text{y} \quad C = \{(x, y, z, w) : z = -2, w = 3\}.$$

(i) Demuestra que B y C son variedades lineales.

(ii) Determina si B y C se cortan, son paralelas, o se cruzan. Si se cortan, halla su intersección.

6. Considera el siguiente par de rectas del espacio afín $\mathbb{A}^3$:

$$r := (1, 0, 1) + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{y} \quad s := (1, 1, 2) + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix} \right\rangle.$$

a) Estudia la posición relativa de r y s en función de los valores de α y β.

b) Describe la variedad lineal suma afín de r y s, también en función de los valores de α y β.

7. En el espacio afín $\mathbb{A}^3$, estudia la posición relativa de las variedades lineales

$$t := (1, 0, 0) + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{y} \quad w := \{(x, y, z) : x + 2y + z = 1\}.$$

En caso de incidencia, describe las variedades lineales intersección y suma afín de r y s.

8. Considera la familia de planos $2\lambda x + (\lambda + 1)y - 3(\lambda - 1)z + 2\lambda - 4 = 0$ en $\mathbb{A}^3$.

a) Demuestra que estos planos tienen una recta en común.

b) Determina los planos de la familia que pasan por el punto $(1,-1,2)$.

c) ¿Cuáles de los planos de esta familia son paralelos a la recta L dada por las ecuaciones implícitas

$$x+3z-1=0,\ y-5z+2=0\ ?$$

9. Encuentra la recta que corta a las rectas

$$s=\left\{\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ x+2y+3z+4=0 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad t=\left\{\begin{array}{l} x+y+3z-1=0 \\ x+2z-5=0 \end{array}\right. ,$$

y pasa por $P=(1,6,-3)$.

10. Consideremos las rectas $L_1=\{x+y+z=x+2y=0\}$, $L_2=\{2x+2y+z=3,\ x+y=2\}$ y $L_3=\{3x+2y+2z=2,\ 2x+y+z=0\}$ del espacio afín $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

a) Demuestra que se cruzan dos a dos.

b) ¿Existe algún plano π paralelo a las tres rectas?