

## ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

### Hoja 4. FORMAS CUADRÁTICAS.

1. Halla, completando cuadrados, una forma canónica de cada una de las siguientes formas cuadráticas definidas en  $\mathbb{R}^3$ , indicando el cambio de base:

$$a) \quad f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 6xy + 4xz, \quad b) \quad f(x, y, z) = xy + 2xz.$$

2. Para cada una de las formas cuadráticas siguientes, definidas en  $\mathbb{R}^3$ , halla una base ortonormal que la reduzca a su forma canónica y escribe esta forma canónica, indicando las ecuaciones del cambio de base:

$$a) \quad f(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz, \quad b) \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2xz + 2yz.$$

3. Para cada una de las formas cuadráticas siguientes halla una una forma normal, los índices de inercia y la signatura y escribe las ecuaciones del cambio de base que la reduce a la forma normal hallada:

$$a) \quad f(x, y, z) = x^2 + 5y^2 - 2xy + 2xz, \quad b) \quad f(x, y, z, t) = xy + zt.$$

4. Determina los valores del parámetro  $\alpha$  para los que

$$a) \quad f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 2\alpha xy + 2\alpha yz + z^2 \quad \text{es definida positiva;}$$

$$b) \quad f(x, y, z, t) = \alpha x^2 + 2xy + \alpha y^2 + \alpha z^2 + 2zt + \alpha t^2 \quad \text{es definida negativa.}$$

5. Determinar los valores del parámetro real  $a$  para los cuales la forma cuadrática cuya matriz con respecto a la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

define un producto escalar en  $\mathbb{R}^3$ .

6. a) Sea  $A$  un matriz  $2 \times 2$  simétrica y definida positiva. Prueba que  $A$  se puede escribir (de manera única) como

$$A = C C^t,$$

donde  $C$  es una matriz triangular inferior cuyas elementos de la diagonal son todos positivos. Halla explícitamente  $C$  en términos de los elementos de  $A$ . (La anterior se conoce como *descomposición de Cholesky* de la matriz  $A$ .)

b) Comprueba que lo mismo ocurre en el caso  $3 \times 3$  (y, en general, para  $n \times n$ ).