4. GEOMETRÍA // 4.4. POLIEDROS.

Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR
EN MATEMÁTICAS
Curso 2012-2013

Bibliografía.

Bibliografía.

1. Alsina, C., Pérez, R., Ruiz, C., *Simetría dinámica*, Serie Matemáticas: Cultura y aprendizaje, Editorial Síntesis, 1989.

Bibliografía.

1. Alsina, C., Pérez, R., Ruiz, C., *Simetría dinámica*, Serie Matemáticas: Cultura y aprendizaje, Editorial Síntesis, 1989.

2. Garcia Gual, J., Sánchez Benito, M., *Viaje al mundo de los poliedros*, en Matemáticas para estimular el talento, A. Pérez Jiménez y M. Sánchez Benito (Coordinadores), Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, (2009), pp.127-143.

Bibliografía.

1. Alsina, C., Pérez, R., Ruiz, C., *Simetría dinámica*, Serie Matemáticas: Cultura y aprendizaje, Editorial Síntesis, 1989.

2. Garcia Gual, J., Sánchez Benito, M., *Viaje al mundo de los poliedros*, en Matemáticas para estimular el talento, A. Pérez Jiménez y M. Sánchez Benito (Coordinadores), Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, (2009), pp.127-143.

3. Guillén Soler, G., *Poliedros*, Serie Matemáticas: Cultura y aprendizaje, Editorial Síntesis, 1991.

Bibliografía.

1. Alsina, C., Pérez, R., Ruiz, C., *Simetría dinámica*, Serie Matemáticas: Cultura y aprendizaje, Editorial Síntesis, 1989.

2. Garcia Gual, J., Sánchez Benito, M., *Viaje al mundo de los poliedros*, en Matemáticas para estimular el talento, A. Pérez Jiménez y M. Sánchez Benito (Coordinadores), Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, (2009), pp.127-143.

3. Guillén Soler, G., *Poliedros*, Serie Matemáticas: Cultura y aprendizaje, Editorial Síntesis, 1991.

4. Holden, A., *Shapes, space and simmetry (with 319 illustrations)*, Editorial Dover, 1972.

Materiales.

Materiales.

1. Schattschneider, D., Walker, W., **M. C. Escher calidociclos**, Taschen Benedikt Ed., 2007: *Desarrollos planos para construir poliedros y anillos de tetraedros decorados con diseños de M. C. Escher*

Materiales.

1. Schattschneider, D., Walker, W., **M. C. Escher calidociclos**, Taschen Benedikt Ed., 2007: *Desarrollos planos para construir poliedros y anillos de tetraedros decorados con diseños de M. C. Escher*

2. **Polydron** (Preferiblemente piezas frameworks): *Piezas poligonales que encajan entre sí. En España lo distribuye la empresa Métodos y Sistemas.*

Materiales.

1. Schattschneider, D., Walker, W., **M. C. Escher calidociclos**, Taschen Benedikt Ed., 2007: *Desarrollos planos para construir poliedros y anillos de tetraedros decorados con diseños de M. C. Escher*

2. Polydron (Preferiblemente piezas frameworks): *Piezas poligonales que encajan entre sí. En España lo distribuye la empresa Métodos y Sistemas.*

3. Material plot: *Formado por láminas de cartulina con polígonos troquelados y gomas elásticas para las uniones.*

Materiales.

1. Schattschneider, D., Walker, W., **M. C. Escher calidociclos**, Taschen Benedikt Ed., 2007: *Desarrollos planos para construir poliedros y anillos de tetraedros decorados con diseños de M. C. Escher*

2. Polydron (Preferiblemente piezas frameworks): *Piezas poligonales que encajan entre sí. En España lo distribuye la empresa Métodos y Sistemas.*

3. Material plot: *Formado por láminas de cartulina con polígonos troquelados y gomas elásticas para las uniones.*

4. Web: http://poly-pro.softonic.com/. *Programa que dibuja las familias de poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares, con sus desarrollos y mapas planos, y algunas de sus familias duales.*

Materiales para construir poliedros con piezas de papel encajadas y sin pegar

Materiales para construir poliedros con piezas de papel encajadas y sin pegar

1. Gurkewitz, R., Arnstein, B., *Multimodular Origami Polyhedra*, Dover Publications, 2003.

Materiales para construir poliedros con piezas de papel encajadas y sin pegar

1. Gurkewitz, R., Arnstein, B., *Multimodular Origami Polyhedra*, Dover Publications, 2003.

2. Simon, L., Arnstein, B., Gurkewitz, R., *Modular Origami Polyhedra*, Dover Publications, 2003.

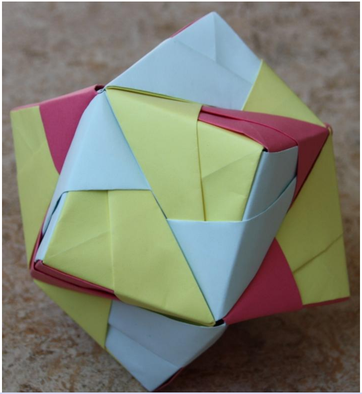
2. Fusè, T., *Unit origami.*, Japan Publications, Inc., 1990.

Materiales para construir poliedros con piezas de papel encajadas y sin pegar

1. Gurkewitz, R., Arnstein, B., *Multimodular Origami Polyhedra*, Dover Publications, 2003.

2. Simon, L., Arnstein, B., Gurkewitz, R., *Modular Origami Polyhedra*, Dover Publications, 2003.

2. Fusѐ, T., *Unit origami.*, Japan Publications, Inc., 1990.



4.4.1. Poliedros regulares.

Un poliedro es un cuerpo delimitado por caras poligonales. Un poliedro regular es un poliedro en el que todas sus caras son *polígonos regulares iguales* y sus vértices son *iguales* en el sentido de que en cada uno de ellos confluye el mismo número de aristas congruentemente.

4.4.1. Poliedros regulares.

Un poliedro es un cuerpo delimitado por caras poligonales. Un poliedro regular es un poliedro en el que todas sus caras son *polígonos regulares iguales* y sus vértices son *iguales* en el sentido de que en cada uno de ellos confluye el mismo número de aristas congruentemente.

¿Cuántos poliedros regulares conocemos?

4.4.1. Poliedros regulares.

Un poliedro es un cuerpo delimitado por caras poligonales. Un poliedro regular es un poliedro en el que todas sus caras son *polígonos regulares iguales* y sus vértices son *iguales* en el sentido de que en cada uno de ellos confluye el mismo número de aristas congruentemente.

¿Cuántos poliedros regulares conocemos?
¿Cuántos poliedros regulares distintos existen?

4.4.1. Poliedros regulares.

Un poliedro es un cuerpo delimitado por caras poligonales. Un poliedro regular es un poliedro en el que todas sus caras son *polígonos regulares iguales* y sus vértices son *iguales* en el sentido de que en cada uno de ellos confluye el mismo número de aristas congruentemente.

¿Cuántos poliedros regulares conocemos?
¿Cuántos poliedros regulares distintos existen?

Los poliedros regulares son convexos, es decir, el segmento que une dos puntos cualesquiera del poliedro está totalmente contenido en él.

4.4.1. Poliedros regulares.

Un poliedro es un cuerpo delimitado por caras poligonales. Un poliedro regular es un poliedro en el que todas sus caras son *polígonos regulares iguales* y sus vértices son *iguales* en el sentido de que en cada uno de ellos confluye el mismo número de aristas congruentemente.

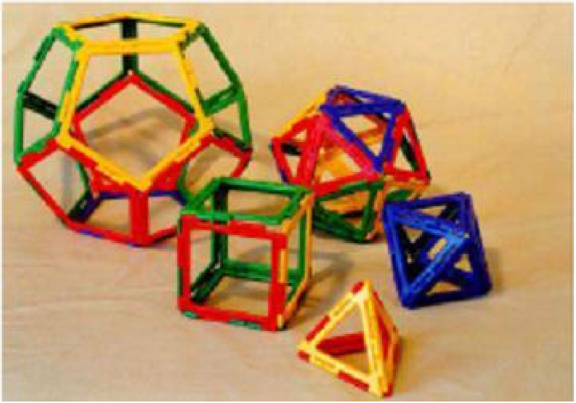
¿Cuántos poliedros regulares conocemos?
¿Cuántos poliedros regulares distintos existen?

Los poliedros regulares son convexos, es decir, el segmento que une dos puntos cualesquiera del poliedro está totalmente contenido en él.

En un poliedro convexo la suma de los ángulos interiores de los polígonos que concluyen en un vértice, que llamaremos la redondez en el vértice, debe ser inferior a 360º.

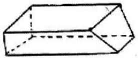
Ejercicio 1. Haciendo un estudio de casos comprueba que solamente pueden existir cinco poliedros regulares.

Ejercicio 1. Haciendo un estudio de casos comprueba que solamente pueden existir cinco poliedros regulares.

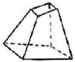


4.4.2. La fórmula de Euler para poliedros simples.

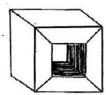
Con los polidros regulares (ver página anterior) y con los poliedros mostrados en esta página rellena el cuadro de la página siguiente.



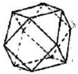
Paralelepipedo



Pirámide truncada

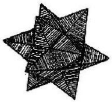


Cubo agujereado



Cubo-octaedro

Octaedro estrellado



Dodecaedro estrellado

Nombre del poliedro	CARAS C	VÉRTICES V	ARISTAS A	C+V-A
Tetraedro				
Octaedro				
Hexaedro o cubo				
Dodecaedro				
Icosaedro				
Paralelepípedo				
Pirámide truncada				
Cubo agujereado				
Cubo-octaedro				
Octaedro estrellado				
Dodecaedro estrellado				
Tetraedro truncado				

Nombre del poliedro	CARAS C	VÉRTICES V	ARISTAS A	C+V-A
Tetraedro				
Octaedro				
Hexaedro o cubo				
Dodecaedro				
Icosaedro				
Paralelepípedo				
Pirámide truncada				
Cubo agujereado				
Cubo-octaedro				
Octaedro estrellado				
Dodecaedro estrellado				
Tetraedro truncado				

¿Que conjetura puede hacerse observando las columnas C+V y A?

Nombre del poliedro	CARAS C	VÉRTICES V	ARISTAS A	C+V-A
Tetraedro				
Octaedro				
Hexaedro o cubo				
Dodecaedro				
Icosaedro				
Paralelepípedo				
Pirámide truncada				
Cubo agujereado				
Cubo-octaedro				
Octaedro estrellado				
Dodecaedro estrellado				
Tetraedro truncado				

¿Que conjetura puede hacerse observando las columnas C+V y A?

Un poliedro se llama simple si no tiene agujeros. De otra manera, su superficie puede deformarse de manera *continua* en la superficie de una esfera.

FÓRMULA DE EULER PARA POLIEDROS SIMPLES

En todo poliedro simple la suma del número de vértices y el número de caras coincide con el número de aristas más 2:

CARAS + VÉRTICES = ARISTAS $+$ 2

$$C + V = A + 2$$

Fórmula de Euler para poliedros simples

En todo poliedro simple la suma del número de vértices y el número de caras coincide con el número de aristas más 2:

CARAS + VÉRTICES = ARISTAS $+$ 2

$$C + V = A + 2$$

D./ La figura de la página siguiente muestra las manipulaciones que hay que hacer al mapa plano de un poliedro simple de manera que la cantidad $C + V - A$ permanezca constante.

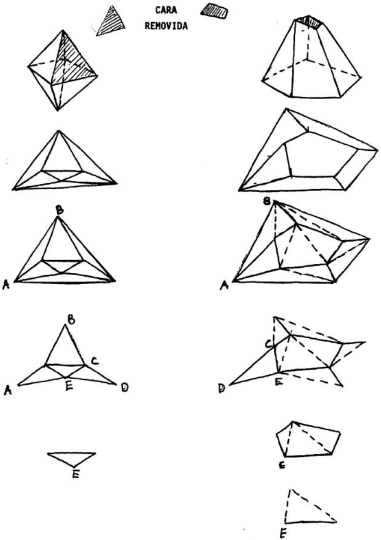


FIGURA 4. Demostrando la fórmula de Euler $C+V-A = 2$: después de varias modificaciones se reduce el problema a demostrar la fórmula $C+V-A = 1$ para un triángulo. Para este, $C = 1$, $V = 3$, $A = 2$ y por tanto la fórmula es cierta.

4.4.3. Poliedros semirregulares.

Un poliedro es semirregular si todas sus caras son *polígonos regulares (no necesariamente iguales)* y sus vértices son *iguales* en el sentido de que en cada uno de ellos confluye el mismo número de aristas congruentemente.

4.4.3. Poliedros semirregulares.

Un poliedro es semirregular si todas sus caras son *polígonos regulares (no necesariamente iguales)* y sus vértices son *iguales* en el sentido de que en cada uno de ellos confluye el mismo número de aristas congruentemente.

Ya hemos estudiado el caso de todos los polígonos iguales (poliedros regulares), asi que consideraremos solo el caso de dos o más polígonos regulares juntándose en un vértice.

4.4.3. Poliedros semirregulares.

Un poliedro es semirregular si todas sus caras son *polígonos regulares (no necesariamente iguales)* y sus vértices son *iguales* en el sentido de que en cada uno de ellos confluye el mismo número de aristas congruentemente.

Ya hemos estudiado el caso de todos los polígonos iguales (poliedros regulares), asi que consideraremos solo el caso de dos o más polígonos regulares juntándose en un vértice.

$$\begin{aligned} k &= \text{n}^{\text{o}} \text{ de aristas en cada vértice} \\ &= \text{n}^{\text{o}} \text{ de polígonos en cada vértice} \end{aligned}$$

Como cada arista comparte dos vértices:

$$kV = 2A \tag{1}$$

4.4.3. Poliedros semirregulares.

Un poliedro es semirregular si todas sus caras son *polígonos regulares (no necesariamente iguales)* y sus vértices son *iguales* en el sentido de que en cada uno de ellos confluye el mismo número de aristas congruentemente.

Ya hemos estudiado el caso de todos los polígonos iguales (poliedros regulares), asi que consideraremos solo el caso de dos o más polígonos regulares juntándose en un vértice.

$$\begin{aligned} k &= \text{n}^{\text{o}} \text{ de aristas en cada vértice} \\ &= \text{n}^{\text{o}} \text{ de polígonos en cada vértice} \end{aligned}$$

Como cada arista comparte dos vértices:

$$kV = 2A \tag{1}$$

Ejercicio 2. Prueba que no pueden confluir en un vértice 4 tipos de caras diferentes.

I. DOS TIPOS DE CARAS DIFERENTES

C_n = número de caras poligonales de n lados

C_m = número de caras poligonales de m lados

$$3 \leq n < m$$

I. DOS TIPOS DE CARAS DIFERENTES

C_n = número de caras poligonales de n lados

C_m = número de caras poligonales de m lados

$$3 \leq n < m$$

La fórmula de Euler se escribe:

$$C_n + C_m + V = A + 2 \tag{2}$$

I. DOS TIPOS DE CARAS DIFERENTES

C_n = número de caras poligonales de n lados

C_m = número de caras poligonales de m lados

$3 \leq n < m$

La fórmula de Euler se escribe:

$$C_n + C_m + V = A + 2 \tag{2}$$

Como cada arista comparte dos caras:

$$nC_n + mC_m = 2A = kV \tag{3}$$

I. DOS TIPOS DE CARAS DIFERENTES

C_n = número de caras poligonales de n lados
C_m = número de caras poligonales de m lados
$3 \leq n < m$

La fórmula de Euler se escribe:

$$C_n + C_m + V = A + 2 \tag{2}$$

Como cada arista comparte dos caras:

$$nC_n + mC_m = 2A = kV \tag{3}$$

Escribamos $\frac{C_n}{C_m} = s$ (esto es, la relación entre el número de n-polígonos y de m-polígonos; s puede no ser entero).

I. DOS TIPOS DE CARAS DIFERENTES

C_n = número de caras poligonales de n lados

C_m = número de caras poligonales de m lados

$3 \leq n < m$

La fórmula de Euler se escribe:

$$C_n + C_m + V = A + 2 \tag{2}$$

Como cada arista comparte dos caras:

$$nC_n + mC_m = 2A = kV \tag{3}$$

Escribamos $\frac{C_n}{C_m} = s$ (esto es, la relación entre el número de n-polígonos y de m-polígonos; s puede no ser entero).

Ejercicio 3. Usar (1), (2) y (3) para demostrar la fórmula:

$$\frac{s+1}{ns+m} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \tag{4}$$

Ejercicio 4. Demostrar que en este caso (dos tipos de caras diferentes) se debe tener $k = 3$, $k = 4$ ó $k = 5$.

Ejercicio 4. Demostrar que en este caso (dos tipos de caras diferentes) se debe tener $k = 3$, $k = 4$ ó $k = 5$.

Ejercicio 5. Si $k = 3$ usar la fórmula (4) para probar que se debe tener $n = 3$, $n = 4$ ó $n = 5$.

Ejercicio 4. Demostrar que en este caso (dos tipos de caras diferentes) se debe tener $k = 3$, $k = 4$ ó $k = 5$.

Ejercicio 5. Si $k = 3$ usar la fórmula (4) para probar que se debe tener $n = 3$, $n = 4$ ó $n = 5$.

Haz un estudio por separado de cada uno de los siguientes casos:

I.1) $k = 3$ y $n = 3$
I.2) $k = 3$ y $n = 4$
I.3) $k = 3$ y $n = 5$

En el estudio de los casos anteriores va a ser necesario usar la siguiente

PROPOSICIÓN

Si n es impar, el poligono semirregular $n - n - m$ no puede construirse.

Ejercicio 6. Si $k = 4$ usar la fórmula (4) para probar que se debe tener $n = 3$.

Ejercicio 6. Si $k = 4$ usar la fórmula (4) para probar que se debe tener $n = 3$.

Haz el estudio del caso:

I.4) $k = 4$ y $n = 3$

Ejercicio 6. Si $k = 4$ usar la fórmula (4) para probar que se debe tener $n = 3$.

Haz el estudio del caso:

$$\text{I.4) } k = 4 \text{ y } n = 3$$

Ejercicio 7. Si $k = 5$ usar la fórmula (4) para probar que se debe tener $n = 3$.

Ejercicio 6. Si $k = 4$ usar la fórmula (4) para probar que se debe tener $n = 3$.

Haz el estudio del caso:

$$\text{I.4)}\ k = 4 \text{ y } n = 3$$

Ejercicio 7. Si $k = 5$ usar la fórmula (4) para probar que se debe tener $n = 3$.

Haz el estudio del caso:

$$\text{I.5)}\ k = 5 \text{ y } n = 3$$

II. TRES TIPOS DE CARAS DIFERENTES

C_n = número de caras poligonales de n lados

C_m = número de caras poligonales de m lados

C_P = número de caras poligonales de p lados

$$3 \leq n < m < p$$

II. TRES TIPOS DE CARAS DIFERENTES

C_n = número de caras poligonales de n lados
C_m = número de caras poligonales de m lados
C_P = número de caras poligonales de p lados

$$3 \leq n < m < p$$

Ejercicio 8. Demostrar que en este caso (tres tipos de caras diferentes) se debe tener $k = 3$ ó $k = 4$.

II. TRES TIPOS DE CARAS DIFERENTES

C_n = número de caras poligonales de n lados
C_m = número de caras poligonales de m lados
C_P = número de caras poligonales de p lados

$$3 \leq n < m < p$$

Ejercicio 8. Demostrar que en este caso (tres tipos de caras diferentes) se debe tener $k = 3$ ó $k = 4$.

Ejercicio 9. Probar que si $k = 3$ y en cada vértice se juntan tres tipos de caras diferentes C_n, C_m y C_p, con $n < m < p$, entonces se debe tener $n = 3$ ó $n = 4$.

II. TRES TIPOS DE CARAS DIFERENTES

C_n = número de caras poligonales de n lados
C_m = número de caras poligonales de m lados
C_P = número de caras poligonales de p lados

$$3 \leq n < m < p$$

Ejercicio 8. Demostrar que en este caso (tres tipos de caras diferentes) se debe tener $k = 3$ ó $k = 4$.

Ejercicio 9. Probar que si $k = 3$ y en cada vértice se juntan tres tipos de caras diferentes C_n, C_m y C_p, con $n < m < p$, entonces se debe tener $n = 3$ ó $n = 4$.

Ejercicio 10. En la misma situación que el ejercicio 9, prueba que el caso $k = 3$ y $n = 3$ es imposible.

Ejercicio 11. En la misma situación que el ejercicio 9, considera ahora el caso $k = 3$ y $n = 4$. Prueba que se debe tener $m = 6$ y $p = 8$ ó $p = 10$.

Ejercicio 11. En la misma situación que el ejercicio 9, considera ahora el caso $k = 3$ y $n = 4$. Prueba que se debe tener $m = 6$ y $p = 8$ ó $p = 10$.

Ejercicio 12. En la misma situación que el ejercicio 9, considera ahora el caso $k = 4$. Prueba que se debe tener $n = 3$. Termina la busqueda de poliedros semirregulares estudiando las posibilidades en este caso.

Ejercicio 11. En la misma situación que el ejercicio 9, considera ahora el caso $k = 3$ y $n = 4$. Prueba que se debe tener $m = 6$ y $p = 8$ ó $p = 10$.

Ejercicio 12. En la misma situación que el ejercicio 9, considera ahora el caso $k = 4$. Prueba que se debe tener $n = 3$. Termina la busqueda de poliedros semirregulares estudiando las posibilidades en este caso.

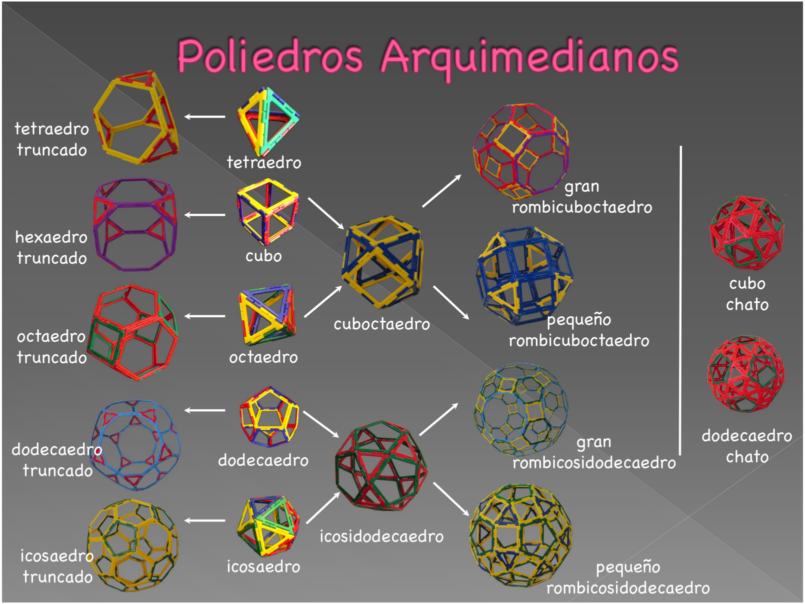
En el estudio anterior se deben haber obtenido:
A) Los 13 sólidos de Arquímedes de las dos próximas trasparencias.
B) La familia infinita de prismas $4 - 4 - n$ que se obtienen cosiendo con cuadrados dos polígonos regulares de n lados (que son su cara superior e inferior).
C) La familia infinita de antiprismas $3 - 3 - 3 - m$ que se obtienen cosiendo con triángulos dos polígonos regulares de m lados, habiendo girado uno de ellos π/m grados.

Los 13 sólidos de Arquímedes

Nombre	Imagen	Descripción
Tetraedro truncado		8 caras: 4 triángulos y 4 hexágonos
Cuboctaedro		14 caras: 8 triángulos y 6 cuadrados
Cubo truncado		14 caras: 8 triángulos y 6 octágonos
Octaedro truncado		14 caras: 6 cuadrados y 8 hexágonos
Rombicuboctaedro o pequeño rombicuboctaedro		26 caras: 18 cuadrados, 8 triángulos
Cuboctaedro truncado o gran rombicuboctaedro		26 caras: 12 cuadrados, 8 hexágonos, 6 octágonos

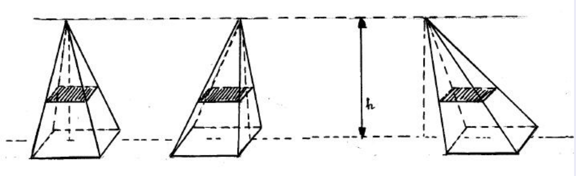
Nombre	Imagen	Descripción
Icosidodecaedro		32 caras: 20 triángulos, 12 pentágonos
Dodecaedro truncado		32 caras: 20 triángulos y 12 decágonos
Icosaedro truncado (balón de fútbol)		32 caras: 12 pentágonos y 20 hexágonos
Rombicosidodecaedro o pequeño rombicosidodecaedro		62 caras: 20 triángulos, 30 cuadrados, 12 pentágonos
Icosidodecaedro truncado, o gran rombicosidodecaedro		62 caras: 30 cuadrados, 20 hexágonos y 12 decágonos
Cubo snub, o cuboctaedro snub	 	38 caras: 32 triangulos y 6 cuadrados
Icosidodecaedro snub, o dodecaedro snub	 	92 caras: 80 triangulos y 12 pentagonos

Generación de algunos sólidos Arquimedianos por truncación



PRINCIPIO DE CAVALIERI

Dos sólidos que tienen secciones con la misma área al cortarlos por planos paralelos tienen igual volumen,



y este volumen se calcula haciendo las *sumas infinitas* de las áreas de todas las secciones:

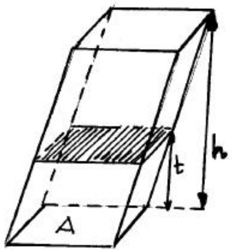
$$V = \int_0^h A(t)\, dt\,,$$

donde $A(t)$ es el área de la seccion a altura t.

Para un prisma con área de la base A, todas las secciones tienen la misma área, $A(t) = A$, y por tanto,

$$V = \int_0^h A\,dt = Ah\,.$$

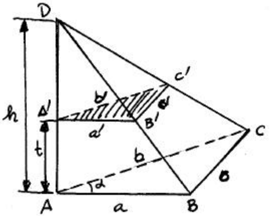
Es decir, el volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de su base por la altura.



Volumen de una pirámide de base triangular

$$V = \frac{1}{3}(\text{Área de la base}) \times (\text{altura})$$

D/.



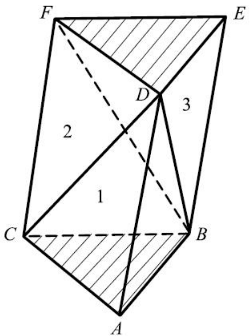
Con referencia a la figura, mostrar que el área $A(t)$ del triángulo $A'B'C'$ es

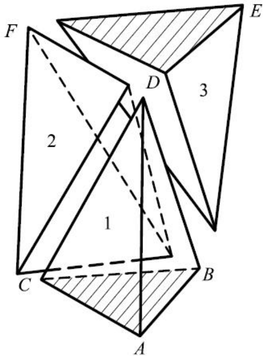
$$A(t) = A\frac{(h-t)^2}{h^2},$$

donde A es el área de la base, y a continuación calcular la integral.

OTRA DEMOSTRACIÓN

D/.





Las pirámides 1 y 3 tienen igual volumen porque tienen igual base y altura. Las pirámides 2 y 3 también tienen igual volumen porque pueden interpretarse con vértice común en D y con bases los triángulos coplanarios iguales CFB y FBE. Luego las tres pirámides tienen igual volumen.

NOTA: La fórmula anterior es válida para una pirámide de base poligonal cualquiera. Basta dividir la base en triángulos y aplicar el resultado para cada una de las pirámides que se forman en su interior con base triangular.

Ejercicio 13. Demostrar que el volumen de un tetraedro regular cuyo lado tiene longitud ℓ es

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}\ell^3 .$$

Ejercicio 14. Demostrar que el volumen de un octaedro regular cuyo lado tiene longitud ℓ es

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}\ell^3 .$$