CMES. Curso 2012-13

Álgebra Lineal // 2.3. Autovalores y autovectores. Sistemas de evolución.

2.3.1. Ejemplos de sistemas de evolución discretos

Ejemplo 1. (Modelo de P. Leslie, 1945) Para estudiar la evolución de una población de pájaros los dividimos en dos grupos de edad: jóvenes y adultos. Los jóvenes no se reproducen y el 30% de ellos sobrevive y llegan a la primavera siguiente convertidos en adultos. Cada adulto produce una media de 2 jóvenes por año y el número de adultos que sobrevive cada año es el 40%. Inicialmente hay 1000 adultos y ningún joven.

Formulación matemática: sean x_n e y_n el número de jóvenes y adultos, respectivamente, al final del año n. Estamos interesados en conocer: **La tasa de crecimiento de cada grupo de edad con el paso del tiempo**, es decir $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}$, y $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{y_{n-1}}$. y **la distribución de cada grupo de edad con el paso del tiempo**, es decir $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_n+y_n}$, y $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n+y_n}$.

Ejemplo 2. (Modelo de A. Markov, 1906) Dos paises A y B comparten la misma moneda. Inicialmente A tiene el 60% de la monedas y B tiene el 40%. Cada año el 80% de las monedas que hay en un país se queda en el mismo y el 20% pasa al otro país. Describe la formulación matemática de esta situación.

2.3.2. Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

Autovalores y autovectores de una matriz A: Un número real, λ, es un **autovalor** de una matriz cuadrada A si existe un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, tal que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. El vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es un **autovector** de A con autovalor λ.

Diagonalización de matrices: Si una matriz cuadrada A de orden k tiene k autovalores reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ (quizá repetidos) y k autovectores $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k}\}$ linealmente independientes correspondientes con los autovalores, puede diagonalizarse como

$$A = PDP^{-1},$$

donde $D = (\lambda_j)$ es una matriz diagonal formada con los autovalores de A y P es la matriz de los autovectores puestos por columnas en el mismo orden que los autovalores colocados en D.

Si tenemos $A = PDP^{-1}$ entonces $A^n = PD^nP^{-1}$ y se pueden calcular fácilmente las potencias de A.

Cálculo de autovalores: Los autovalores de una matriz cuadrada A son las soluciones λ de la ecuación $det(A - \lambda I_k) = 0$.

Cálculo de autovectores: Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovector de una matriz cuadrada A de tamaño k, cualquier solución **no nula** de la ecuación $(A-\lambda I_k)\vec{x} = \vec{0}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$, es un autovector de A de autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$.

Autovalores reales distintos: Si A es una matriz de orden k con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ **distintos**, sus autovectores $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k}\}$ son linealmente independientes.

2.3.3. Significado de los autovalores y autovectores en los modelos de evolución discretos.

Solución para matrices diagonalizables: El sistema de evolución discreto $\vec{X_n} = A\overrightarrow{X_{n-1}}$, donde A es una matriz de orden k diagonalizable, satisface

$$\vec{X_n} = C_1\lambda_1^n\vec{u_1} + C_2\lambda_2^n\vec{u_2} + \cdots + C_k\lambda_k^n\vec{u_k},$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ (quizá repetidos) son los autovalores reales de A y $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k}$ son sus correspondientes autovectores linealmente independientes. Las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_k$ se deteminan con las condiciones iniciales.

Autovalor dominante de una matriz: Un autovalor real $\lambda > 0$ de una matriz diagonalizable A se dice que es **dominante** si para cualquier otro autovalor $\beta \neq \lambda$ de A se tiene $\lambda > |\beta|$.

Tasa de crecimiento de cada grupo de edad: Sea $\vec{X_n} = A\overrightarrow{X_{n-1}}$ un sistema de evolución con k grupos de edad. Si la matriz A es diagonalizable con autovalor dominante λ_1, la **tasa de crecimiento** de cada grupo de edad tiende a λ_1 con el paso del tiempo.

Distribución de la población en cada grupo de edad Sea $\vec{X_n} = A\overrightarrow{X_{n-1}}$ un sistema de evolución con k grupos de edad. Si la matriz A es diagonalizable y λ_1 es un autovalor dominante de A con autovector $\vec{u_1} = (u_1, u_2, \dots, u_k)^t$ el porcentaje de individuos en el grupo de edad j con el paso del tiempo tiende a

$$\frac{u_j}{u_1 + \cdots + u_k} \times 100\%\,, \quad j = 1, 2, \dots, k\,.$$

Ejercicio 8. Una población de individuos está distribuida en dos grupos de edad, jóvenes y adultos. Cada año un individuo joven produce, en promedio, 1,5 nuevos jóvenes, y un individuo adulto produce, en promedio, 2 nuevos jóvenes. Por otro lado, solo el 8% de los jóvenes sobrevive y pasa a ser adulto, mientras que todos los individuos adultos han muerto al finalizar el segundo año.
a) Escribe el modelo matricial de la dinámica de esta población.
b)¿Cuál es la tasa de crecimiento de cada grupo de edad con el paso del tiempo?
c) ¿Cómo se distribuye la población con el paso del tiempo?
d) Si inicialmente hay 100 jóvenes y 100 adultos, ¿cuántos habrá en cada grupo después de 10 años?

Ejercicio 9. Una colonia de perdices vive en dos ecosistemas X e Y. Inicialmente hay 1500 perdices en X y 500 en Y. Cada mes el 5% de las perdices de X migra a Y y a su vez el 5% de las perdices de Y migra a X.
a) Escribe las ecuaciones de la evolución del número de perdices en cada ecosistema.
b)¿Qué cantidad de perdices habrá en cada ecosistema después de 1 año?
c) ¿Qué cantidad de perdices habrá en cada ecosistema con el paso del tiempo?

2.3.4. Procesos de Markov.

Proceso de Markov: Un sistema evolutivo de la forma $\vec{X_n} = T\overrightarrow{X_{n-1}}$ donde T es una matriz cuadrada de orden k en la que la suma de los elementos de cada una de sus columnas es 1 se llama un **proceso de Markov**. La matriz T se denomina **matriz de transición** del proceso.

Ejemplo 4: En una provincia se ha observado que si un dia llueve la probabilidad de que llueva al dia siguiente es 0,8. Sin embargo, si un dia está soleado la probabilidad de que al dia siguiente esté soleado es 0,7. Escribe la formulación matemática de este sistema evolutivo.

Invarianza: La suma de las cantidades iniciales en un proceso de Markov permanece invariante durante todo el proceso.

Autovalor 1: $\lambda = 1$ es el mayor autovalor de la matriz de transición de un proceso de Markov.

,

Ejercicio 10: En el ejemplo de los paises que comparten monedas, regido por el proceso,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

determinar:
a) En qué porcentaje se estabiliza la cantidad de monedas en cada pais.
b) El porcentaje de monedas en cada pais al cabo de 10 años.

Ejercicio 11. La probabilidad de que un dia esté lluvioso o soleado en la provincia del ejemplo 4 se regía por el proceso,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

a) Si el dia primero de un mes está soleado, ¿cuál es la probabilidad de lluvia el dia 30 del mismo mes? b) ¿Cómo evoluciona este sistema con el paso del tiempo?

Ejercicio 12. **Cultivo de plantas. Rasgos genéticos heredados.** En un vivero hay 1000 flores rojas (genotipo AA), 1000 flores rosas (genotipo Aa) y 1000 flores blancas (genotipo aa) de una determinada especie. Solo se fertiliza cada planta con las de su genotipo.
a) Escribe un sistema que describa la cantidad de flores de cada color después de cada periodo de fertilización.
b) ¿Cuál será la distribución de las flores con el paso del tiempo?
c) ¿Cuántos periodos de fertilización pasarán antes de que desaparezcan las plantas de flores rosas?