ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 1: Espacio vectorial euclídeo I.

1. Indica razonadamente cuáles de las siguientes aplicaciones bilineales $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definen un producto escalar en $\mathbb{R}^2$:

i. $\phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1y_1 + 2y_1x_2 - 3x_1y_2 + 2x_2y_2$.
ii. $\phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1y_1 - x_2y_2$.
iii. $\phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$.
Encuentra la matriz, en la base canónica, de aquellas aplicaciones bilineales que sean producto escalar.

2. Considera la aplicación $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \quad \to \quad (2x_1 - 2x_2 + 4x_3)y_1 + (-2x_1 - 2x_3)y_2 + (6x_3 + 4x_1 - 2x_2)y_3 \ .$$

i. Demuestra que ϕ es una forma bilineal simétrica.
ii. Decide de manera razonada si ϕ es un producto escalar.
iii. Calcula el conjunto de los vectores (x, y, z) que cumplen $\phi\ ((x, y, z), (1, -1, -1)) = 0$.
iv. Calcula el conjunto de los vectores (x, y, z) que cumplen $\phi\ ((x, y, z), (x, y, z)) = 0$.

3. Sea $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal dada por:

$$\psi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} .$$

i. Decide de manera razonada si ψ es un producto escalar.
ii. Encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ respecto a la que la matriz de ψ es diagonal.

4. Considera la aplicación $\phi : \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(A, B) = \text{traza}\ (AB^t)$. Demuestra que ϕ es un producto escalar en $\mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$.

5. Halla los cosenos de los ángulos entre los vectores no nulos del subespacio vectorial de ecuaciones $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ de $\mathbb{R}^n$ y los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, con el producto escalar usual.

6. Sea $(E, <, >)$ un espacio euclídeo . Demuestra:

i. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 2(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2)$, para todo $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$ (ley del paralelogramo).
ii. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 4 < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$, para todo $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$ (identidad de polarización).
iii. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 = 2 < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$, para todo $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$.

7. Demuestra la siguiente generalización del teorema de Pitágoras:

$$\|\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \cdots + \overrightarrow{x_n}\|^2 = \|\overrightarrow{x_1}\|^2 + \|\overrightarrow{x_2}\|^2 + \cdots + \|\overrightarrow{x_n}\|^2 ,$$

si los vectores $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n} \in E$ son ortogonales dos a dos.

8. Si $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ son dos vectores cualesquiera en un espacio euclídeo E, demuestra que

$$\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\| \geq |\|\overrightarrow{x}\| - \|\overrightarrow{y}\|| .$$

9. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una norma en V es una aplicación $\| \, \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

a) $\|\overrightarrow{u}\| \geq 0, \forall \overrightarrow{u} \in V$ y $\|\overrightarrow{u}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

b) $\|\lambda \overrightarrow{u}\| = \lambda \|\overrightarrow{u}\|, \forall \overrightarrow{u} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.

c) $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$ (desigualdad triangular).

i. Sea $\|\overrightarrow{x}\| = |x_1| + |x_2|$ definida en $\mathbb{R}^2$. Demuestra que $\| \, \|$ es una norma en $\mathbb{R}^2$, pero que no proviene de ningún producto escalar porque no satisface la ley del paralelogramo.

10. Dados $\overrightarrow{x_1} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{x_2} = (4, -2, 0)$ y $\overrightarrow{x_3} = (1, 1, 5)$ en $\mathbb{R}^3$ construye los vectores $\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}$ e $\overrightarrow{y_3}$ según el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. (En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar usual.)

11. Sea $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >= x_1y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$ un producto escalar en $\mathbb{R}^3$. Encontrar una base ortogonal del subespacio vectorial $M \subset \mathbb{R}^3$ para:

i. $M = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = x_3\}$.

ii. $M = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$.

12. Dada la base $B' = \{u_1 = (-2, -1, 1),\ u_2 = (0, -1, 0),\ u_3 = (1, -1, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$,

i. Demuestra que existe un producto escalar ϕ respecto al cual B' es una base ortogonal. Decide de manera razonada si ϕ es único con esta propiedad.

ii. Demuestra que existe un producto escalar ψ respecto al cual B' es una base ortonormal. Decide de manera razonada si ψ es único con esta propiedad. Describe la matriz de ψ respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

13. Dado un número natural n, definimos $V_n = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{grado}(p(x)) \leq n\}$. En $V_n \times V_n$, se define la aplicación ϕ:

$$\phi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

i. Demuestra que ϕ es un producto escalar.

ii. Describe el subespacio de polinomios ortogonales al polinomio x.

iii. Calcula una base ortogonal de V_3.

14. Decide, de forma razonada, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i. En el espacio vectorial (real) euclídeo E, los vectores $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ son ortogonales si y sólo si $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||$.

ii. En un espacio vectorial (real) euclídeo X, se cumple la igualdad

$$||\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}||^2 = ||\overrightarrow{x}||^2 + ||\overrightarrow{y}||^2 + ||\overrightarrow{z}||^2 + 2\left(\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle + \langle \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \rangle + \langle \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x} \rangle\right) ,$$

para todos los vectores $\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y},\ \overrightarrow{z} \in X$.

iii. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, podemos encontrar dos vectores $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ y un producto escalar Φ tales que $\Phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 1$ y $\Phi(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y}) = \Phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2$.

iv. En $\mathbb{R}^3$, la forma bilineal cuya expresión respecto a la base usual de $\mathbb{R}^3$ es

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3$$

es un producto escalar.

v. Sean $u_1 = (5, 0, 0)$, $u_2 = (1, 5, 0)$ y $u_3 = (1, 1, 5)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Entonces, existe un producto escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto al que los tres vectores son ortogonales entre sí y $\|u_1\|_\phi = 5$, $\|u_2\|_\phi = 2$ y $\|u_3\|_\phi = 1$.