MATEMÁTICAS
1º curso del Grado en Bioquímica – Curso 2011-12

HOJA DE EJERCICIOS 4

DERIVACIÓN (CONTINUACIÓN).

1. La concentración de oxígeno en un estanque contaminado con un residuo orgánico viene dada por la función:

$$y = f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}, \text{ para } 0 \leq t < \infty,$$

donde t representa el tiempo en semanas.

a) Hallar los instantes en los que se alcanzan las concentraciones máxima y mínima de oxígeno.

b) Hallar el instante en que la velocidad de crecimiento de la concentración de oxígeno es máxima.

c) Representar la función.

2. Las granjas de patos contaminan el agua con nitrógeno en forma de ácido úrico. Se hace un seguimiento del nivel de ácido úrico (Y) de un río, cerca de una de estas granjas, a lo largo del tiempo (en meses). Este nivel de ácido úrico se puede describir, durante un buen período de tiempo, mediante la función:

$$y = f(t) = 4\ln(t+1) - 5\ln(t+2) + 10 \qquad \text{para } t \geq 0.$$

a) ¿Cuál es el nivel de ácido úrico al comenzar el seguimiento?

b) El nivel de ácido úrico, ¿crece o decrece en los primeros meses? ¿Cuándo alcanza su nivel máximo o mínimo? ¿Cuál es este nivel máximo o mínimo?

c) Hacer una representación aproximada y razonada de la evolución del nivel de ácido úrico durante el período [0, 24] (los dos primeros años).

3. Dos especies de paramecios (*paramecium aurelia y paramecium caudata*) compiten en un nicho ecológico por los mismos recursos. El número de individuos por mililitro (N) de *paramecium caudata* en este ecosistema viene dado por la función:

$$N = 50(6t+1)e^{-2t} \qquad (t = \text{tiempo en días}).$$

a) Número de individuos de *paramecium caudata* al empezar el estudio.

b) Calcular el número máximo de individuos e indicar cuando se alcanza.

c) ¿Qué ocurre con la población a largo plazo?

APROXIMACIÓN DE FUNCIONES. POLINOMIO DE TAYLOR

4. Escribir la aproximación lineal de $f(x) = \sqrt{x}$ en un punto $a > 0$ y usar el resultado para hallar el valor aproximado de $\sqrt{50}$. (Compara el resultado obtenido con el que da tu calculadora)

5. Sea $N(t)$ el tamaño de una población y supongamos que la velocidad de crecimiento per cápita es del 3%. Se sabe que el tamaño de la población en $t = 4$ es 100 (en miles de individuos). Usar una aproximacion lineal para calcular el tamaño de la población en el instante $t = 4,1$.

6. Calcular el polinomio de Taylor de grado n en $a = 0$ para la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$. ¿Qué sucede si se utilizan estos polinomios de Taylor para calcular el valor aproximado de $f(2)$?

7. Calcular los polinomios de Taylor de grados 1, 2 y 3 de las funciones dadas en los puntos indicados:

$$a) f(x) = \cos x \text{ en } a = 0 \qquad b) f(x) = x^{1/3} \text{ en } a = -1$$

Dibujar en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de cada una de las funciones y sus polinomios de Taylor cerca del punto a (puedes hacerlo a mano, con tu calculadora, con Excel o con un programa de ordenador).

8. a) Hallar el polinomio de Taylor de grado 4 para aproximar la función $y = f(t) = \ln(1 + t)$ alrededor de $t = 0$. Comparar el valor de tu calculadora y el aproximado para $t = 1$.

   b) ¿Qué grado del polinomio de Taylor de $y = f(t) = \ln(1+t)$ en $a = 0$ permite estimar $\ln(1,1)$ con un error inferior a 10^{-3} (usar la fórmula de Lagrange).

9. Considerar el *modelo exponencial* correspondiente a un crecimiento del 5% en cada unidad de tiempo, partiendo de un valor inicial de $N_0 = 100$ (en $t = 0$).

   a) Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 para aproximar $f(t)$ alrededor de $t = 0$.

   b) Comparar el valor exacto y el aproximado del tamaño de la población al cabo de 2 unidades de tiempo.