MATEMÁTICAS Y SISTEMAS ELECTORALES

Eugenio Hernández
Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
Noviembre 2001

Las votaciones sirven para conseguir tomar una decisión que refleje adecuadamente los intereses de un grupo, teniendo en cuenta las preferencias, a veces dispares, de cada uno de los individuos que componen el colectivo. Las votaciones son la base de la democracia. Se usan en muchos países para elegir a los representantes en las Cámaras. El sistema educativo español establece elecciones para elegir a algunos miembros del Consejo Escolar, al Decano de una Facultad y al Rector de la Universidad. Los miembros de los consejos de empresas utilizan las votaciones para tomar decisiones.

El sistema de elección que se use puede influir en la decisión final. Todos los métodos tienen fallos inherentes y ocasionan de vez en cuando resultados paradójicos (en la sección 1 mostrarnos un ejemplo). El teorema de K. Arrow establece que, suponiendo que se cumplen ciertas reglas elementales, todo método electoral presenta algún resultado paradójico. El sueño de encontrar el método electoral ideal es imposible: no hay método que pueda aplicarse a todas las situaciones.

1. TODOS GANAN (CON ALGÚN MÉTODO)

En este ejemplo se presentan cinco métodos de elección y un ejemplo en el que cada uno de estos métodos produce un ganador diferente.

Un partido político elige a su Presidente nacional mediante votación entre 55 delegados que previamente han sido elegidos por los militantes del partido. Hay cinco candidatos: A, B, C, D, E. Cada delegado tiene una lista de prioridades para elegir a los candidatos. Hay 5! = 120 posibles listas, pero la formación de coaliciones permite expresar las preferencias de los votantes en la siguiente tabla:

	Número de delegados					
Preferencia	18	12	10	9	4	2
1ª	A	B	C	D	E	E
2ª	D	E	B	C	B	C
3ª	E	D	E	E	D	D
4ª	C	C	D	B	C	B
5ª	B	A	A	A	A	A

El candidato A propone que la elección se haga por **mayoría simple** (gana el que más votos obtenga). **El ganador es A** con 18 votos, a pesar de que 37 le pusieron en último lugar en su lista de preferencias.

El candidato B propone el método de la **segunda vuelta** (en la primera elección se eliminan todos los candidatos excepto los dos primeros; a continuación se enfrentan los dos candidatos más votados y el ganador es el que consigue la mayoría absoluta). Con este método **el ganador es B**.

El candidato C no comparte los resultados anteriores. Propone el método de **eliminación del perdedor** (se realizan votaciones sucesivas y después de cada votación se elimina a quien menos votos haya obtenido). Con este método **C es el ganador**.

El candidato D tiene alguna inclinación hacia las matemáticas, y propone que, dados los resultados dispares de los métodos anteriores el Presidente sea elegido dando a cada candidato la puntuación de 5,4,3,2 ó 1 según que la preferencia del elector sea la primera, la segunda, la tercera, la cuarta o la quinta. Este método se llama **Recuento Borda**. El problema se agrava: **El ganador es D**.

Finalmente, E piensa que el método adecuado es **el de la comparación uno a uno o método de Condorcet** (el ganador es el candidato que haya ganado a todos los restantes en estos enfrentamientos entre dos). No siempre hay un ganador con el método de Condorcet, pero en este caso lo hay y **es E**.

2. EL REPARTO DE ESCAÑOS: EL MÉTODO DE LOS RESTOS MAYORES (DE HAMILTON, O DE VINTON)

La Constitución Española de 1978 establece que habrá una Cámara Alta (el Senado) y una Baja (el Congreso de los Diputados). El Congreso de los Diputados consta de 350 miembros. Para garantizar que todas las provincias tengan Diputados se asignan 2 a cada una de ellas y 1 a cada una de las ciudades de Ceuta y Melilla. Puesto que hay cincuenta provincias, se tienen asignados 102 escaños. La Constitución Española establece que el resto de los escaños, es decir 350-102=248 deben asignarse **proporcionalmente** con respecto al número de votantes censados en cada provincia.

¿Cómo se reparten los 248 escaños?

Ejemplo 1. Para las elecciones del 3 de marzo de 1996 el censo total de España fue de 31.955.956 habitantes con derecho a voto. El censo de votantes de Madrid era de 4.145.316. La **porción representativa de Madrid** es

$$\frac{4.145.316}{31.955.956} \approx 0'1297.$$

Para repartir 248 escaños, a Madrid le corresponderían $0'1297 \times 248 = 32'17$ escaños.

Ejemplo 2. En las mismas elecciones del 3 de marzo de 1996 el censo de votantes de Soria fue de 78.430. La **porción representativa de Soria** es

$$\frac{78.430}{31.955.956} \approx 0'0025.$$

Para repartir 248 escaños, a Soria le corresponderían $0'0025 \times 248 = 0'62$ escaños.

Un poco de notación

n = número de provincias.
p_1, p_2, ... p_n = población con derecho a voto de cada provincia.
$p = p_1 + p_2 + ... + p_n$ = población de votantes.
e = número de escaños que hay que asignar.
p_i /p = porción representativa de cada provincia.
q_i = **cuota** de cada provincia = $(p_i /p) \times e$

La cuota de Madrid en las elecciones Generales de 1996 fue 32'17 y la de Soria 0'62. La cuota de cada provincia es, en general, un número fraccionario. Como no podemos asignar trozitos de escaños a las provincias se presenta el problema del reparto.

Problema del reparto

Asignar números enteros a_1, a_2, ... a_n a cada una de las provincias de manera que cada a_i sea aproximadamente igual a la cuota q_i y que $a_1 + a_2 + ... + a_n = e$.

Un poco de notación.

Cuota inferior = parte entera de la cuota
Cuota superior = parte entera de la cuota más uno

El método de los restos mayores , de Hamilton o de Vinton.

Con este método se comienza asignando a cada provincia su cuota inferior. Debido a las partes decimales la asignación total será inferior al número de escaños que deben repartirse. El resto de los escaños se van asignando uno a uno a las provincias cuya cuota tiene mayor resto decimal.

En nuestros dos primeros ejemplos Soria tendría mayor prioridad que Madrid para llevarse uno de estos escaños. Supongamos que Soria consigue un escaño (su cuota superior) y Madrid se queda con 32 (su cuota inferior). El que esto suceda depende de los restos decimales de las restantes provincias. Inmediatamente se aprecia que el reparto **no es proporcional**, a pesar de haberlo intentado. Cada uno de los 32 congresistas elegidos en Madrid debe responder a $\frac{4{,}145{,}316}{32} = 129.541'13$ votantes. Pero el único congresista de Soria solamente debe responder a 78.430 votantes.

Esta desproporcionalidad se agrava si le añadimos los dos escaños que la Constitución Española concede a cada provincia . Así, cada uno de los 34 Congresistas por la provincia de Madrid debería responder a 121.921'06 votantes, mientras que cada uno de los 3 Congresistas de Soria solamente debería responder a 26.143'33 votantes.

El método de los restos mayores (de Hamilton o de Vinton) apenas se usa actualmente. La razón de su desuso no es la falta de proporcionalidad. Este método produce, a veces, resultados paradójicos y que los políticos consideran mucho más perniciosos que la falta de proporcionalidad. Mostrarnos esta paradoja en el ejemplo 4.

Ejemplo 3. El método de los restos mayores puede usarse también para asignar el número de Diputados que consigue cada partido en cada una de las provincias teniendo en cuenta el número de votos obtenidos. La provincia de Cádiz tenía asignados 9 escaños para las elecciones del 3 de marzo de 1996. Los votos obtenidos por cada uno de los 4 partidos que se presentaron por esta provincia fueron:

PP = 217.397, PSOE = 267.826, IU = 80.912, PA = 37.294

El reparto, según el método de los restos mayores aparece en el cuadro siguiente:

TABLA 1	CADIZ -- 9 escaños			
	Votos	Cuota	Cuota inferior	Reparto restos mayores
PP	217.397	3’24	3	3
PSOE	267.826	3’99	3	4
IU	80.912	1’21	1	1
PA	37.294	0’56	0	1
Total	603.429		7	9

Ejemplo 4. La provincia de Badajoz tenía asignados 6 escaños para las elecciones Generales de 1989. El número de votos de cada uno de los cuatro partidos que se presentaron y el reparto según el método de los restos mayores se da en la tabla 2 .

TABLA 2	BADAJOZ -- 6 escaños (1989)			
	Votos	Cuota	Cuota inferior	Reparto restos mayores
Partido A	208.560	3’49	3	3
Partido B	82.032	1’38	1	1
Partido C	38.102	0’64	0	1
Partido D	30.214	0’51	0	1
Total	358.909		4	6

Supongamos que Badajoz tuviera asignados 7 escaños (quizá porque ha aumentado el tamaño del Congreso de los Diputados por decisión política, o porque ha aumentado el censo de votantes). El reparto según el método de los restos mayores se da en la tabla 3, considerando que no ha variado el número de votos de cada partido.

TABLA 3	BADAJOZ -- 7 escaños (Supuesto)			
	Votos	Cuota	Cuota inferior	Reparto restos mayores
Partido A	208.560	4’04	4	4
Partido B	82.032	1’60	1	2
Partido C	38.102	0’74	0	1
Partido D	30.214	0’59	0	0
Total	358.909		5	7

Comparando las tablas 2 y 3 se observa un resultado paradójico. Mientras que el partido D conseguía un diputado cuando Badajoz tenía 6 escaños, cuando le asignaron 7 el partido dejó de tener un representante. El partido D no está muy contento con el método de los restos mayores.

Un reparto se dice que es **monótono con respecto al número de escaños** si al aumentar el número de éstos ningún grupo puede tener menos escaños que en el reparto anterior.

El ejemplo 4 muestra que el método de los restos mayores no es monótono con respecto al número de escaños. Esta anomalía es considerada por los políticos más perniciosa que la falta de proporcionalidad. Ello provocó la búsqueda de otros métodos de reparto.

Por razones históricas, este hecho se conoce con el nombre de la **paradoja de Alabama**. El nombre le viene de una observación hecha después del censo de 1880 en los Estados Unidos. Estaba en vigencia el método de Hamilton (o de los restos mayores) para repartir los escaños del Congreso entre los Estados. El Departamento del censo proporcionó al Congreso una tabla con los repartos de cada Estado para tamaños del Congreso que variaban de 275 hasta 350 miembros. En la tabla se observaba que a Alabama le correspondían 8 escaños si el Congreso tenía 299 miembros, pero bajaba a 7 escaños si el tamaño del Congreso se aumentaba a 300. Cuando algunos Estados norteños propusieron que el Congreso pasara a tener 300 miembros, los Estados sureños, a los que pertenecía Alabama, se opusieron y acusaron a los Estados proponentes de manipulación política.

3. EL REPARTO DE ESCAÑOS: EL MÉTODO DE LOS DIVISORES NATURALES (D'HONT, JEFFERSON O HAGENBACH-BICHOFF)

En el ejemplo 3 se hizo el reparto de escaños de los 9 votos asignados a la provincia de Cádiz entre los cuatro partidos que concurrieron a las elecciones del 3 de marzo de 1996 por esta provincia. El reparto se hizo según el método de los restos mayores y fue:

PP : 3 Diputados;   PSOE : 4 Diputados; IU : 1 Diputado; PA : 1 Diputado.

El reparto actual es diferente:

PP : 4 Diputados;   PSOE : 4 Diputados; IU : 1 Diputado; PA : 0.

¿Cómo se hace el reparto de escaños en el Parlamento español? El sistema electoral español se rige por le método de **D'Hont** (**Jefferson** en Estados Unidos y **Hagenbach-Bichoff** en Austria), que es un método del divisor en el que los divisores son los números naturales.

La asignación de escaños con el método de los divisores naturales se basa en una función de prioridad que se asigna a cada partido para conseguir el siguiente escaño. Cuando se comienza el proceso la prioridad de un partido X para obtener su primer Diputado es la cantidad de votos que ha obtenido:

$$P_1(X) = \text{número de votos de } X = \text{Votos } (X)$$

Si el partido X ha obtenido 1 escaño, su prioridad para obtener el segundo escaño es:

$$P_1(X) = \text{Votos } (X) / 2 \text{ .}$$

El resto de los partidos continua con la prioridad P_1 que es su número de votos hasta que consigue el primer Diputado.

En general, si el partido X ha conseguido n(X) Diputados, su prioridad para obtener el siguiente escaño es:

$$P_1(X) = \text{Votos } (X) / (n+1) \text{ .}$$

El proceso termina cuando se hayan asignado todos los escaños.

El nombre que se da a este método viene de que la función de prioridad se obtiene dividiendo entre los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, ...

Ejemplo 5. Hacemos el reparto de escaños para Cádiz en las elecciones del 3 de marzo de 1996, con los mismos datos del ejemplo 3.

Reparto de 9 escaños entre cuatro partidos en la provincia de CADIZ (Elecciones de 1996). Método de los divisores naturales o de D'Hont				
	PP	PSOE	IU	PA
Votos	217.397	267.826	80.912	37.294
Votos/1	217.397^{2}	267.826^{1}	80.912^{6}	37.294
Votos/2	108.699^{4}	133.913^{3}	40.456	
Votos/3	72.466^{7}	89.275^{5}		
Votos/4	54.349^{9}	66.957^{8}		
Votos/5	43.479	53.565		
REPARTO	4	4	1	0

El PSOE consigue el primer escaño. Para conseguir su segundo Diputado su prioridad es:

$$\frac{267.826}{2} = 133.913$$

Ahora es el PP quien tiene mayor prioridad y consigue su primer Diputado que ocupa el segundo escaño asignado a la provincia de Cádiz. Para conseguir su segundo Diputado la función de prioridad del PP es:

$$\frac{217.397}{2} = 108.698$$

El proceso continua hasta asignar los nueves escaños que corresponden a la provincia de Cádiz. El PP y el PSOE consiguen 4 Diputados cada uno e izquierda unida consigue 1 Diputado. Los 37.249 votos del PA no han servido para obtener representación en el Congreso.

El método de los divisores naturales nunca da lugar a la paradoja de Alabama. Si la provincia de Cádiz tuviera que repartir 10 escaños, el décimo escaño correspondería al partido con mayor prioridad, que resulta ser el PSOE. Los nueve primeros escaños se asignan de la misma manera que antes y, por tanto, ningún partido verá disminuida su representación parlamentaria.

Este método favorece la formación de coaliciones y la desaparición de pequeños partidos. Una muestra es el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6. Supongamos que en las elecciones del 3 de marzo de 1996 IU y PA forman una coalición IU+PA que obtiene un número de votos igual a la suma de los votos de cada partido. El reparto, con el método de los divisores naturales, concede 4 Diputados al PSOE, 3 al PP y 2 a la coalición IU+PA. Cada uno de los partidos de esta coalición puede conseguir 1 Diputado: este método favorece la formación de coaliciones.

Reparto de 9 escaños entre cuatro partidos en la provincia de CADIZ (Supuesto con datos de 1996). Método de los divisores naturales o de D'Hont			
	PP	PSOE	IU + PA
Votos	217.397	267.826	118.206
Votos/1	217.397^{2}	267.826^{1}	118.206^{4}
Votos/2	108.699^{5}	133.913^{3}	59.103^{9}
Votos/3	72.466^{7}	89.275^{6}	39.402
Votos/4	54.349	66.957^{8}	
Votos/5	43.479	53.565	
REPARTO	3	4	2

4. OTROS MÉTODOS DEL DIVISOR: EL MÉTODO DE LOS DIVISORES IMPARES Y EL MÉTODO DE LA MEDIA GEOMÉTRICA.

El método D' Hont es un método del divisor. En estos métodos la prioridad de un partido para obtener un Diputado se obtiene dividiendo el número de votos entre una función que depende del número de Diputados que se hayan conseguido.

En el método de los divisores impares, también conocido como método de **St. Lagüe** o método de **Webster**, la función de prioridad se establece dividiendo el número de votos sucesivamente entre los números impares

1, 3, 5, 7, 9, ...

Este método está diseñado para disminuir la función de prioridad de los partidos con más votos a medida que consiguen escaños, de una manera más drástica que en el caso de los divisores naturales. El método tiende a favorecer a los partidos con menor número de votantes.

Ejemplo 7. Se hace el reparto de los 9 escaños que tenía Cadiz en las Elecciones Generales del 3 de marzo de 1996, usando el método de los divisores impares. Con este método el PSOE consigue 4 Diputados, 3 el PP y uno cada uno de los partidos IU y PA.

Reparto de 9 escaños entre cuatro partidos en la provincia de CADIZ (Elecciones de 1996). Método de los divisores impares o de St. Lagüe				
	PP	PSOE	IU	PA
Votos	217.397	267.826	80.912	37.294
Votos/1	217.397^{2}	267.826^{1}	80.912^{4}	37.294^{9}
Votos/3	72.466^{5}	89.275^{3}	26.971	12.431
Votos/5	43.479^{7}	53.565^{6}		
Votos/7	31.057	38.261^{8}		
Votos/9		29.758		
REPARTO	3	4	1	1

Se han ideado otros métodos del divisor. Uno de ellos es el **método de la media geométrica** o de **Hill-Huntington**. En este método los divisores son de la forma:

$$\sqrt{n(n+1)} \quad : \quad \sqrt{2} = 1'41, \quad \sqrt{6} = 2'54, \quad \sqrt{12} = 3'46, \quad \sqrt{20} = 4'47, \quad \sqrt{30} = 5'48$$

Ejemplo 8. Se hace el reparto de los nueve escaños que tenía asignados la provincia de Cádiz en las Elecciones Generales del 3 de marzo de 1996, usando el método de la media geométrica. El PSOE consigue 5 Diputados, 3 el PP y 2 IU.

Reparto de 9 escaños entre cuatro partidos en la provincia de CADIZ (Elecciones de 1996). Método de la media geométrica o de Hill-Huntington				
	PP	PSOE	IU	PA
Votos	217.397	267.826	80.912	37.294
Votos/1’41	154.182[2]	189.948[1]	57.384[8]	26.450
Votos/2’45	88.733[4]	109.317[3]	33.025	
Votos/3’46	62.832[6]	77.406[5]		
Votos/4’47	48.635	59.916[7]		
Votos/5’48		48.873[9]		
REPARTO	3	5	1	0

En el ejemplo 8 se puede apreciar un fallo que aparece en todos los métodos del divisor. Las cuotas para cada partido con los votos del ejemplo 8 son:

	PP	PSOE	IU	PA
Cuota inferior	3	3	1	0
Cuota superior	4	4	2	1

El PSOE obtiene más escaños que su cuota superior. Se dice que un método satisface la **condición de la cuota** si siempre asigna a cada contendiente la cuota inferior o la cuota superior.

El método de la media geométrica no satisface la condición de la cuota (véase el ejemplo 8). **Ningún método del divisor satisface la condición de la cuota**. Aunque esto es conocido, los políticos prefieren utilizar algún método del divisor antes que le método de los restos mayores, ya que éste sufre la paradoja de Alabama. Por otro lado, **todos los métodos del divisor son monótonos con respecto al número de escaños**, lo que impide las manipulaciones políticas como la que querían someter a Alabama.

5. ¿CUÁL DE LOS MÉTODOS DEL DIVISOR ES MEJOR?

Para poder contestar a la pregunta del título de esta sección es necesario ponerse de acuerdo en qué significa "mejor". El matemático E. V. Huntington propuso, en los años veinte, que se decidiera cuál era el mejor método usando una medida de injusticia. Es difícil que esta medida de injusticia sea cero, pero una vez establecida, el mejor método es el que la minimiza.

Una medida de injusticia es la siguiente. Definimos **la porción representativa del partido X**, PR(X), como

$$PR(X) = \frac{e(X)}{v(X)},$$

donde $e(X)$ es el número de escaños conseguidos por el partido X y $v(X)$ es el número de votos conseguidos por el mismo partido. Este número mide la porción de escaño que le corresponde a un votante de cada uno de los partidos.

Para la provincia de Cádiz, con los datos obtenidos en las elecciones del 3 de marzo de 1996 y el reparto D'Hont , la porción representativa de cada partido es la siguiente, con 9 decimales correctos:

TABLA 4. Porción representativa de cada partido con el método D'Hont.
PR(PSOE) = $\frac{4}{267.826} = 0'000014935$
PR(PP) = $\frac{4}{217.397} = 0'000018400$
PR (IU) = $\frac{1}{80.912} = 0'000012359$
PR(PA) = 0

Si un método fuera **justo** todos los partidos deberían tener la misma porción representativa; es decir, todos los votantes estarían igualmente representados. Esto no es siempre así, como se aprecia en la tabla 4.

Para cada par de partidos X_1, X_2, definimos la **diferencia de porción representativa**, DR(X_1, X_2), como

$$DPR(X_1, X_2) = \left| PR(X_1) - PR(X_2) \right|.$$

Un método de reparto es **justo**, para esta medida de injusticia, si al cambiar la asignación de un escaño entre dos partidos, la diferencia de porción representativa entre ambos partidos es mayor.

Con el método de los divisores impares, ejemplo 7, la porción representativa de cada partido aparece en la tabla 5.

TABLA . Porción representativa de cada partido con el método de los divisores impares.
PR(PSOE) = $\frac{4}{267.826} = 0'000014935$
PR(PP) = $\frac{3}{217.397} = 0'0000138000$
PR (IU) = $\frac{1}{80.912} = 0'000012359$
PR(PA) = $\frac{1}{37.294} = 0'000026814$

En las Elecciones Generales del 3 de marzo de 1996, el noveno escaño de la provincia de Cádiz fue asignado al PP en el método de los divisores naturales (ejemplo 5), pero fue asignado al PA con el método de los divisores impares (ejemplo 7). En estas dos posibilidades, la diferencia de porción representativa entre el PP y el PA es inferior en el método de los divisores impares ya que con éste:

$$DPR(PP,PA) = |0'000018400 - 0| = 0'000018400,$$

mientras que con el método de los divisores naturales:

$$DPR(PP,PA) = |0'000013800 - 0'000026814| = 0'000013014.$$

Esto es un hecho general.

TEOREMA. *El método de los divisores impares minimiza la diferencia de porción representativa entre cada par de contendientes que compiten por un escaño.*

Presentamos la demostración. Sean X_1 y X_2 dos partidos que compiten por el próximo escaño según el método de los divisores impares. Sea n_1 el número de escaños que ha conseguido el partido X_1 y n_2 el correspondiente para X_2 en este momento. El siguiente escaño es asignado de acuerdo con la función de prioridad del método de los divisores impares:

$$P(X_1) = \frac{v(X_1)}{2n_1 + 1} \qquad \text{y} \qquad P(X_2) = \frac{v(X_2)}{2n_2 + 1}$$

donde $v(X)$ es el número de votos del partido X. Supongamos que

$$P(X_1) > P(X_2).$$

En esta hipótesis, el partido X_1 consigue el siguiente escaño antes que el partido X_2. Lo que tenemos que probar es que si esto sucede, la diferencia de porción representativa, DPR(X_1, X_2), es inferior que si sucede lo contrario.

Llamemos **caso 1** al supuesto de que X_1 consiga el siguiente escaño antes que X_2. En este caso,

$$PR(X_1) = \frac{n_1+1}{v(X_1)} \ , \qquad PR(X_2) = \frac{n_2}{v(X_2)} \ .$$

Por tanto,

$$DPR(X_1, X_2) = \left| \frac{n_1+1}{v(X_1)} - \frac{n_2}{v(X_2)} \right|$$

es la diferencia de porción representativa entre X_1 y X_2 en el caso 1. Llamemos **caso 2** al contrario, es decir el partido X_2 consigue el siguiente escaño antes que el X_1. En este caso:

$$PR(X_1) = \frac{n_1}{v(X_1)} \ , \qquad PR(X_2) = \frac{n_2+1}{v(X_2)} \ .$$

Por tanto,

$$DPR(X_2, X_1) = \left| \frac{n_2+1}{v(X_2)} - \frac{n_1}{v(X_1)} \right| \ .$$

De $P(X_1) > P(X_2)$ deducimos

$$\frac{1}{P(X_1)} < \frac{1}{P(X_2)} \Leftrightarrow \frac{2n_1+1}{v(X_1)} < \frac{2n_2+1}{v(X_2)}$$

Sencillas transformaciones algebraicas muestran

$$\frac{n_1+1}{v(X_1)} - \frac{n_2}{v(X_2)} < \frac{n_2+1}{v(X_2)} - \frac{n_1}{v(X_1)} \ . \qquad (\blacklozenge)$$

Si el miembro de la izquierda de esta desigualdad fuera positivo tendríamos

$$DPR(X_1, X_2) < DPR(X_2, X_1),$$

lo que prueba que la injusticia, medida con la diferencia de porción representativa, es inferior si se concede el escaño al partido X_1, que era el que tenía la prioridad mayor.

Si el miembro de la izquierda de la desigualdad señalada con (♦) fuera negativo, es fácil probar que

$$\frac{n_2}{v(X_2)} - \frac{n_1+1}{v(X_1)} < \frac{n_2+1}{v(X_2)} - \frac{n_1}{v(X_1)} \ ,$$

ya que esta desigualdad es equivalente a

$$0 < \frac{1}{v(X_2)} + \frac{1}{v(X_1)} \ ,$$

que es, claramente, cierta. También en este caso

$$DPR(X_1, X_2) = \left|\frac{n_1+1}{v(X_1)} - \frac{n_2}{v(X_2)}\right| = \left|\frac{n_2}{v(X_2)} - \frac{n_1+1}{v(X_1)}\right| < DPR(X_2, X_1) \, .$$

6. COMENTARIOS

A la vista de todo lo expuesto parece que el método de los divisores impares es mejor que cualquier otro. Además, los matemáticos Michel L. Balinski y H. Peyton Young mostraron que entre todos los métodos del divisor conocidos, el de los divisores impares es el que tiene menor probabilidad de no cumplir la condición de la cuota. ¿Por qué no se usa el método de los divisores impares?

En primer lugar, hay otras medidas de injusticia que no son minimizadas por el método de los divisores impares. De hecho, el matemático E. V. Huntington analizó, en los años veinte, varios métodos del divisor conocidos y otros que inventó, y logró probar que cada uno de estos métodos tiene una medida de injusticia que le minimiza.

En segundo lugar, la elección de un método es una decisión política, no necesariamente basada en la equidad. El sistema electoral español eligió el método D'Hont (o de los divisores naturales) para garantizar la gobernabilidad. Deliberadamente se eligió el método para favorecer a los partidos con mayor número de votos.

Las últimas siete elecciones habidas en España ilustran este fenómeno. A las primeras elecciones democráticas concurrieron una gran cantidad de partidos, que no obtuvieron representación parlamentaria. Con el tiempo, muchos fueron desapareciendo y solo los mayoritarios (ya sea a nivel nacional o autonómico) y los que formaron coaliciones se mantuvieron en la contienda.

Paradójicamente, el deseo de favorecer la gobernabilidad no se ha plasmado en hechos. De las siete elecciones pasadas, en solo dos de ellas el partido vencedor obtuvo la mayoría absoluta.

La búsqueda de un método que estuviera libre de la paradoja de Alabama y que satisfaciera la condición de la cuota, fue objeto de estudio de los matemáticos Michel L. Balinski y H. Peyton Young. En los años setenta lograron encontrar un método que satisfacía la condición de la cuota y que era monótono con respecto al número de escaños, es decir, no tiene la paradoja de Alabama. Le llamaron el **método de la cuota**. Sin embargo, el método de la cuota tiene una propiedad no deseable: **no es monótono con respecto a los votos**. Se llama la **paradoja de la población**.

Si un partido aumenta su número de votos, sin que el número de votos de los restantes partidos varíe, aquél esperaría obtener el mismo número de escaños que antes, o quizá uno más. Con el método de la **cuota** esto puede no suceder: el partido que aumenta su número de votos puede ver disminuido el número de escaños que consigue. Esta es la **paradoja de la población**, considerada por los políticos más perniciosa que la desviación ocasional de la condición de la cuota.

BIBLIOGRAFÍA

M. L. Balinski, H. P. Young. *The quota method of apportionment.* American Mathematical Monthly 82, (1975), 701-730.

COMAP. *For all practical purposes: Introduction to contemporary mathematics*, (capítulo 14). Freeman, 3ª edición, 1994. Una traducción al castellano será publicada próximamente al castellano con el título de *Las matemática en la vida cotidiana.*

P. C. Fishburn, S. J. Brams. *Paradoxes of preferential voting.* Mathematics Magazine, vol. 56, no. 4, (1983), 207-214.

D. Rae, V. Ramírez. *Quince años de experiencia. El sistema electoral español.* McGraw-Hill, Madrid, 1993.

D. R. Woodall. *How proportional is proportional representation?* The Mathematical Intelligencer, vol. 8, no. 4, (1986).

EJERCICIOS

1. Los seis partidos A, B, C, D, E y F se presentan a unas elecciones para **elegir 6 escaños** vacantes y obtienen los votos que se indican en la tabla adjunta. Rellena todas las columnas de esta tabla y observa que el método de los divisores naturales (método D'Hont) no satisface la condición de la cuota. (Tomado de M.L. Balinski y H. P. Young).

Partido	Votos	Cuota	Reparto Hamilton	Reparto D'Hont	Reparto St. Lagüe
A	2060				
B	469				
C	461				
D	450				
E	447				
F	440				
Total	4327		6	6	6

2. Un país tiene un parlamento con 577 escaños. En una elección, los Socialistas Democráticos reciben 323.829 votos, los Socialdemócratas reciben 880.702 votos, los Democratacristianos reciben 5.572.614 votos, los Verdes reciben 1.222.498 votos, y los Comunistas reciben 111.224 votos. El número de escaños ganados por cada partido ha de ser proporcional al número de votos emitidos a su favor. Calcule la cuota de cada partido y asigne los escaños con el método de Hamilton.

3. Un país tiene cinco estados, con poblaciones de 5.576.330, 1.387.342, 3.334.241, 7.512.860 y 310.968. Su cámara de representantes se reparte por el método de Hamilton.

a. Calcule los repartos cuando los escaños de la cámara son 82, 83 y 84. ¿Ocurre la paradoja de Alabama?

b. Repita los cálculos cuando el número de escaños es 89, 90 y 91.

4. Un país tiene seis estados con poblaciones de 27.774, 25.178, 19.947, 14.614, 9.225 y 3.292. Su Cámara de Representantes tiene 36 escaños. Determine los repartos utilizando los métodos de (1) Hamilton, (2) D'Hont, (3) St. Lagüe y (4) Hill-Huntington.

5. En las elecciones parlamentarias españolas de 1996 la provincia de Tenerife tenía asignados 7 escaños en el Congreso de los Diputados. Los votos obtenidos por los cuatro partidos que obtuvieron más del 3% fueron: PP = 135.311 votos, PSOE = 142.316, CC = 109.694 y IU = 21.833. Determine los repartos de escaños utilizando los métodos de (1) Hamilton, (2) D'Hont, (3) St. Lagüe y (4) Hill-Huntington.

6. En las elecciones parlamentarias españolas de 1996 la provincia de Burgos tenía asignados 4 escaños en el Congreso de los Diputados. Los votos obtenidos por los tres partidos que obtuvieron más del 3% fueron: PP = 126.095 votos, PSOE = 71.098, IU = 25.785. Determine los repartos de escaños utilizando los métodos de (1) Hamilton, (2) D'Hont, (3) St. Lagüe y (4) Hill-Huntington

7. Un país gobernado por una democracia parlamentaria tiene dos partidos políticos, los Liberales y los Conservadores. El número de escaños que recibe un partido ha de ser proporcional al número de votos que recibe en las elecciones. Suponga que los Liberales reciben el 49% de los votos. Si el número total de escaños en el Parlamento es 99, ¿cuántos escaños reciben los Liberales según (1) el método de Hamilton? (2) el método de St. Lagüe? (3) el método de D'Hont?