# 6. PROBABILIDAD

Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR EN MATEMÁTICAS
Curso 2011-2012

# 6.1. Frecuencia y probabilidad. Modelos de probabilidad

# 6.1. Frecuencia y probabilidad. Modelos de probabilidad

**FENÓMENO ALEATORIO**

Un fenómeno o experimento es aleatorio si puede dar lugar a varios posibles resultados sin que pueda predecirse exactamente que va a ocurrir en cada experimento.

# 6.1. Frecuencia y probabilidad. Modelos de probabilidad

**Fenómeno aleatorio**

Un fenómeno o experimento es aleatorio si puede dar lugar a varios posibles resultados sin que pueda predecirse exactamente que va a ocurrir en cada experimento.

John Kerrich, matemático inglés, estuvo prisionero durante la Segunda Guerra Mundial. En la soledad de su celda lanzó una moneda 10.000 veces y anotó las veces que salió cara:

# 6.1. Frecuencia y probabilidad. Modelos de probabilidad

### Fenómeno aleatorio

Un fenómeno o experimento es aleatorio si puede dar lugar a varios posibles resultados sin que pueda predecirse exactamente que va a ocurrir en cada experimento.

John Kerrich, matemático inglés, estuvo prisionero durante la Segunda Guerra Mundial. En la soledad de su celda lanzó una moneda 10.000 veces y anotó las veces que salió cara:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Nº de lanzamientos | 10 | 30 | 5000 | 10000 |
| Caras | 4 | 17 | 2523 | 5067 |
| Proporción | $0,4$ | $0,56$ | $0,507$ | $0,5067$ |

# 6.1. Frecuencia y probabilidad. Modelos de probabilidad

### FENÓMENO ALEATORIO

Un fenómeno o experimento es aleatorio si puede dar lugar a varios posibles resultados sin que pueda predecirse exactamente que va a ocurrir en cada experimento.

John Kerrich, matemático inglés, estuvo prisionero durante la Segunda Guerra Mundial. En la soledad de su celda lanzó una moneda 10.000 veces y anotó las veces que salió cara:

| Nº de lanzamientos | 10 | 30 | 5000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|
| Caras | 4 | 17 | 2523 | 5067 |
| Proporción | $0,4$ | $0,56$ | $0,507$ | $0,5067$ |

**En un fenómeno aleatorio la tendencia a largo plazo de cada uno de los resultados es predecible**

# Lanzamiento de una moneda con EXCEL.

## Lanzamiento de una moneda con EXCEL.

=ALEATORIO()
Produce un número aleatorio mayor o igual a 0 y menor que 1.

## Lanzamiento de una moneda con EXCEL.

=ALEATORIO()
Produce un número aleatorio mayor o igual a 0 y menor que 1.

**La tecla F9 produce un nuevo número aleatorio**

## Lanzamiento de una moneda con EXCEL.

=ALEATORIO()
Produce un número aleatorio mayor o igual a 0 y menor que 1.

**La tecla F9 produce un nuevo número aleatorio**

=SI(ALEATORIO()$<$ 0,5;0;1)
Si el número aleatorio es menor que 0,5 pone un 0 (que puede ser CARA) y en caso contrario pone 1 (que puede ser CRUZ).

## Lanzamiento de una moneda con EXCEL.

=ALEATORIO()
Produce un número aleatorio mayor o igual a 0 y menor que 1.

**La tecla F9 produce un nuevo número aleatorio**

=SI(ALEATORIO()$<$ 0,5;0;1)
Si el número aleatorio es menor que 0,5 pone un 0 (que puede ser CARA) y en caso contrario pone 1 (que puede ser CRUZ).

★ Repetir las veces que se desee.

## Lanzamiento de una moneda con EXCEL.

=ALEATORIO()
Produce un número aleatorio mayor o igual a 0 y menor que 1.

**La tecla F9 produce un nuevo número aleatorio**

=SI(ALEATORIO()$<$ 0,5;0;1)
Si el número aleatorio es menor que 0,5 pone un 0 (que puede ser CARA) y en caso contrario pone 1 (que puede ser CRUZ).

★ Repetir las veces que se desee.

=CONTAR.SI(Celda1:Celda2;"$=$ 0")
Cuenta el número de ceros en las celdas entre Celda1 y Celda2.

La probabilidad de un resultado en un experimento aleatorio es la proporción de veces que el resultado ocurre en un número infinito de pruebas:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{Nº de veces que aparece el resultado}}{\text{Nº de veces } n \text{ que se hace el experimento}}$$

La probabilidad de un resultado en un experimento aleatorio es la proporción de veces que el resultado ocurre en un número infinito de pruebas:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{N}^{\text{o}} \text{ de veces que aparece el resultado}}{\text{N}^{\text{o}} \text{ de veces } n \text{ que se hace el experimento}}$$

**Descripción matemática de la probabilidad.**

La probabilidad de un resultado en un experimento aleatorio es la proporción de veces que el resultado ocurre en un número infinito de pruebas:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{N}^{\text{o}} \text{ de veces que aparece el resultado}}{\text{N}^{\text{o}} \text{ de veces } n \text{ que se hace el experimento}}$$

**Descripción matemática de la probabilidad.**

### Espacio muestral

El espacio muestral $E$ de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los resultados posibles que pueden obtenerse en el experimento.

La probabilidad de un resultado en un experimento aleatorio es la proporción de veces que el resultado ocurre en un número infinito de pruebas:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{N}^{\text{o}} \text{ de veces que aparece el resultado}}{\text{N}^{\text{o}} \text{ de veces } n \text{ que se hace el experimento}}$$

**Descripción matemática de la probabilidad.**

### Espacio muestral

El espacio muestral $E$ de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los resultados posibles que pueden obtenerse en el experimento.

### Suceso

Un suceso es un subconjunto del espacio muestral $E$. Los sucesos con un solo elemento se llaman elementales o simples y el resto sucesos compuestos.

La probabilidad de un resultado en un experimento aleatorio es la proporción de veces que el resultado ocurre en un número infinito de pruebas:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{N}^{\text{o}} \text{ de veces que aparece el resultado}}{\text{N}^{\text{o}} \text{ de veces } n \text{ que se hace el experimento}}$$

**Descripción matemática de la probabilidad.**

### Espacio muestral

El espacio muestral $E$ de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los resultados posibles que pueden obtenerse en el experimento.

### Suceso

Un suceso es un subconjunto del espacio muestral $E$. Los sucesos con un solo elemento se llaman elementales o simples y el resto sucesos compuestos.

★ Poner ejemplos.

El siguiente paso es asignar probabilidades a los sucesos del espacio muestral. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los posibles sucesos de un experimento. La colección $\mathcal{A}$ debe tener estructura de álgebra de sucesos (no vacía, cerrada frente a uniones y complementarios). Si $E$ es finito, $\mathcal{A}$ puede ser todos los subconjuntos de $E$.

El siguiente paso es asignar probabilidades a los sucesos del espacio muestral. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los posibles sucesos de un experimento. La colección $\mathcal{A}$ debe tener estructura de álgebra de sucesos (no vacía, cerrada frente a uniones y complementarios). Si $E$ es finito, $\mathcal{A}$ puede ser todos los subconjuntos de $E$.

### Asignación de probabilidades

Dado un espacio muestral $E$ y un álgebra de sucesos $\mathcal{A}$, una probabilidad es una aplicación $p : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ tal que

1. $p(E) = 1$.
2. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ son sucesos incompatibles dos a dos (es decir, disjuntos dos a dos), $p(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_n)$ .

**NOTA**: Si $E$ es finito, la condición 2. puede sustituirse por: si $A \cap B = \emptyset, p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ .

## Regla de Laplace

Si el espacio muestral $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es finito y todos los sucesos elementales son equiprobables (es decir, $p(x_1) = p(x_2) = \ldots p(x_n) = 1/n$), para cualquier suceso $\mathcal{A}$ se tiene:

$$p(A) = \frac{\text{N}^{\text{o}} \text{ de elementos de } A}{n}\,.$$

### REGLA DE LAPLACE

Si el espacio muestral $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es finito y todos los sucesos elementales son equiprobables (es decir, $p(x_1) = p(x_2) = \ldots p(x_n) = 1/n$), para cualquier suceso $\mathcal{A}$ se tiene:

$$p(A) = \frac{\text{N}^{\text{o}} \text{ de elementos de } A}{n}.$$

**Ejercicio 1.** Se lanza un dado equiprobable. Escribe el espacio muestral y la asignación de probabilidades a cada uno de los suscesos elementales.

## Regla de Laplace

Si el espacio muestral $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es finito y todos los sucesos elementales son equiprobables (es decir, $p(x_1) = p(x_2) = \ldots p(x_n) = 1/n$), para cualquier suceso $\mathcal{A}$ se tiene:

$$p(A) = \frac{\text{Nº de elementos de } A}{n}.$$

**Ejercicio 1.** Se lanza un dado equiprobable. Escribe el espacio muestral y la asignación de probabilidades a cada uno de los suscesos elementales.

**Ejercicio 2.** Se lanzan dos dados equiprobables y se anota la suma. Escribe el espacio muestral y la asignación de probabilidades a cada uno de los suscesos elementales.

### Regla de Laplace

Si el espacio muestral $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es finito y todos los sucesos elementales son equiprobables (es decir, $p(x_1) = p(x_2) = \ldots p(x_n) = 1/n$), para cualquier suceso $\mathcal{A}$ se tiene:

$$p(A) = \frac{\text{N}^{\text{o}} \text{ de elementos de } A}{n}.$$

**Ejercicio 1.** Se lanza un dado equiprobable. Escribe el espacio muestral y la asignación de probabilidades a cada uno de los suscesos elementales.

**Ejercicio 2.** Se lanzan dos dados equiprobables y se anota la suma. Escribe el espacio muestral y la asignación de probabilidades a cada uno de los sucesos elementales.

**Ejercicio 3.** A partir de los axiomas de probabilidad deduce lo siguiente: i) $p(A^c) = 1 - p(A)$, ii) $p(\emptyset) = 0$, iii) Si $B \subset A$, $p(A - B) = p(A) - p(B)$, iv) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

# 6.2. Probabilidad condicionada. Sucesos independientes.

### PROBABILIDAD CONDICIONADA

Dados dos sucesos $A$ y $B$, la probabilidad de $B$ condicionada a $A$ es la proporción de veces que ocurre $B$ entre las que ha ocurrido $A$: $p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}\,, \quad p(A) > 0\,.$

# 6.2. Probabilidad condicionada. Sucesos independientes.

**PROBABILIDAD CONDICIONADA**

Dados dos sucesos $A$ y $B$, la probabilidad de $B$ condicionada a $A$ es la proporción de veces que ocurre $B$ entre las que ha ocurrido $A$: $p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}\,, \quad p(A) > 0\,.$

**Ejercicio 4.** Al lanzar dos monedas se sabe que ha salido al menos una cara. ¿Cuál es ahora la probabilidad de que hayan salido dos caras?

# 6.2. Probabilidad condicionada. Sucesos independientes.

**PROBABILIDAD CONDICIONADA**

Dados dos sucesos $A$ y $B$, la probabilidad de $B$ condicionada a $A$ es la proporción de veces que ocurre $B$ entre las que ha ocurrido $A$: $p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}\,, \quad p(A) > 0\,.$

**Ejercicio 4.** Al lanzar dos monedas se sabe que ha salido al menos una cara. ¿Cuál es ahora la probabilidad de que hayan salido dos caras?

**Ejercicio 5.** Se ha realizado una encuesta a 120 personas sobre cuál de los periódicos $A$, $B$ y $C$ leen habitualmente. Los resultados son que 70 leen $A$, 45 leen $B$, 35 leen $C$, 5 ninguno de los tres, 15 leen $A$ y $B$, 5 $B$ y $C$, 20 $A$ y $C$, y 5 leen los tres periódicos. Si se sabe que la persona lee al menos dos periódicos, ¿cuál es la probabilidad de que lea $B$? ¿Es cierto que siempre lee $A$?

De la definición de probabilidad condicionada se deduce $p(A \cap B) = p(A) \times p(B/A)$, que es la regla del producto para hallar la probabilidad de que $A$ y $B$ ocurran a la vez.

De la definición de probabilidad condicionada se deduce $p(A \cap B) = p(A) \times p(B/A)$, que es la regla del producto para hallar la probabilidad de que $A$ y $B$ ocurran a la vez.

### Sucesos independientes

Dados dos sucesos $A$ y $B$, se dice que $B$ es independiente de $A$, si $p(B/A) = p(B)$, es decir, la probabilidad de $B$ no varía antes y después de que haya ocurrido $A$.

**NOTA**: De la regla del producto se deduce que si $B$ es independiente de $A$, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$. Además, si $B$ es independiente de $A$ se tiene:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B/A) \times p(A)}{p(B)} = \frac{p(B) \times p(A)}{p(B)} = p(A)\,,$$

por lo que $A$ es también independiente de $B$ y podemos hablar de sucesos independientes.

**Ejercicio 6.** Una caja contiene 8 bolas: 6 son rojas (R) y 2 son negras (N). Se realizan dos extracciones suponiendo que la bola extraida se devuelve a la caja antes de la segunda extracción. Calcula la probabilidad de extraer una bola de cada color.

**Ejercicio 6.** Una caja contiene 8 bolas: 6 son rojas (R) y 2 son negras (N). Se realizan dos extracciones suponiendo que la bola extraida se devuelve a la caja antes de la segunda extracción. Calcula la probabilidad de extraer una bola de cada color.

A veces es difícil obtener la probabilidad del suceso $A \cap B$, pero es fácil calcular $p(B/A)$ o $p(A/B)$, por lo que se puede usar la regla del producto para calcular $A \cap B$.

**Ejercicio 6.** Una caja contiene 8 bolas: 6 son rojas (R) y 2 son negras (N). Se realizan dos extracciones suponiendo que la bola extraida se devuelve a la caja antes de la segunda extracción. Calcula la probabilidad de extraer una bola de cada color.

A veces es difícil obtener la probabilidad del suceso $A \cap B$, pero es fácil calcular $p(B/A)$ o $p(A/B)$, por lo que se puede usar la regla del producto para calcular $A \cap B$.

**Ejercicio 7.** En una empresa trabajan 10 personas: 4 de ellas son fijas y 6 tienen contrato temporal. Se quiere saber cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar a tres de ellas, todas tengan un contrato temporal.

# 6.3. Cálculo de probabilidades.

**Ejercicio 8.** Un sistema de ordenadores asigna códigos de conexión a los usuarios eligiendo cuatro letras al azar (de entre 26 del alfabeto) ¿Cuál es la probabilidad de que un código no tenga $X$?

**Ejercicio 8.** Un sistema de ordenadores asigna códigos de conexión a los usuarios eligiendo cuatro letras al azar (de entre 26 del alfabeto) ¿Cuál es la probabilidad de que un código no tenga $X$?

**Variaciones, permutaciones, combinaciones.**

**Ejercicio 8.** Un sistema de ordenadores asigna códigos de conexión a los usuarios eligiendo cuatro letras al azar (de entre 26 del alfabeto) ¿Cuál es la probabilidad de que un código no tenga $X$?

**Variaciones, permutaciones, combinaciones.**

A. Variaciones sin repetición de $n$ elementos tomados de $r$ en $r$ es el número de grupos ordenados de $r$ elementos que pueden hacerse con los $n$ elementos sin repetirlos:

$$V_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}\,.$$

**Ejercicio 8.** Un sistema de ordenadores asigna códigos de conexión a los usuarios eligiendo cuatro letras al azar (de entre 26 del alfabeto) ¿Cuál es la probabilidad de que un código no tenga $X$?

**Variaciones, permutaciones, combinaciones.**

A. Variaciones sin repetición de $n$ elementos tomados de $r$ en $r$ es el número de grupos ordenados de $r$ elementos que pueden hacerse con los $n$ elementos sin repetirlos:

$$V_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}\,.$$

B. Variaciones con repetición de $n$ elementos tomados de $r$ en $r$ es el número de grupos ordenados de $r$ elementos que pueden hacerse con los $n$ elementos pudiendo repetirse:

$$VR_n^r = n \times n \times n \dots n = n^r\,.$$

C. Permutaciones de $r$ elementos son los grupos ordenados de $r$ elementos sin repetición:

$$P_r = V_r^r = r(r-1)(r-2)\dots 2 \times 1) = r!\,.$$

C. Permutaciones de $r$ elementos son los grupos ordenados de $r$ elementos sin repetición:

$$P_r = V_r^r = r(r-1)(r-2)\ldots 2 \times 1) = r!\,.$$

D. Combinaciones de $n$ elementos tomados de $r$ en $r$ es el número de grupos de $r$ elementos que pueden hacerse con los $n$ elementos sin distinguir el orden (dos con distinto orden e iguales elementos son la misma combinación) y sin repetirse:

$$CR_n^r = \frac{V_n^r}{P_r} = \frac{n!/(n-r)!}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}\,.$$

C. Permutaciones de $r$ elementos son los grupos ordenados de $r$ elementos sin repetición:

$$P_r = V_r^r = r(r-1)(r-2)\ldots 2 \times 1) = r!\,.$$

D. Combinaciones de $n$ elementos tomados de $r$ en $r$ es el número de grupos de $r$ elementos que pueden hacerse con los $n$ elementos sin distinguir el orden (dos con distinto orden e iguales elementos son la misma combinación) y sin repetirse:

$$CR_n^r = \frac{V_n^r}{P_r} = \frac{n!/(n-r)!}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}\,.$$

**Ejercicio 9.** Se reparte una mano de 7 cartas de una baraja de 40 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que la mano contenga el As de oros y el 3 de oros?

La regla del producto, $P(A \cap B) = p(A) \times P(B/A)$, es muy útil para calcular probabilidades. Ayuda hacer un diagrama en forma de árbol con la probabilidades de la intersección de dos sucesos de pruebas consecutivas.

La regla del producto, $P(A \cap B) = p(A) \times P(B/A)$, es muy útil para calcular probabilidades. Ayuda hacer un diagrama en forma de árbol con la probabilidades de la intersección de dos sucesos de pruebas consecutivas.

**Ejercicio 10.** Se lanza una moneda. Si sale cara se acude a una urna que contiene 4 bolas blancas y 2 negras para extraer una bola. Si sale cruz se acude a una urna que contiene 3 bolas blancas y 3 negras para extraer una bola.
a) Escribe el espacio muestral y determina las probabilidades de cada suceso elemental.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraida sea blanca?
c) Si la bola extraida ha sido blanca, ¿ cuál es la probabilidad de que la bola extraida sea de la primera urna?

**Ejercicio 11.** Un diagnóstico para un cierto tipo de cáncer tiene probabilidad 0,96 de resultar positivo si el paciente tiene cáncer; el 95 % de los individuos sin cáncer dan negativo. Se elige un individuo al azar en una población en la que se sabe que el 1 % tiene cáncer.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo dé positivo y tenga cáncer? ¿Y que dé negativo y tenga cáncer?
b) Si un individuo ha dado resultado negativo, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cáncer?

## 6.4.1. La paradoja del caballero de Méré.

En Francia, en el siglo XVII, en los casinos se jugaba a estos dos juegos:
A) Apostar sobre el resultado de que al lanzar cuatro dados apareciera al menos un 6.
B) Apostar sobre el resultado de que en 24 lanzamientos de un par de dados apareciese al menos una vez un doble 6.

## 6.4.1. La paradoja del caballero de Méré.

En Francia, en el siglo XVII, en los casinos se jugaba a estos dos juegos:

A) Apostar sobre el resultado de que al lanzar cuatro dados apareciera al menos un 6.

B) Apostar sobre el resultado de que en 24 lanzamientos de un par de dados apareciese al menos una vez un doble 6.

El caballero de Méré pensaba que ambos resultados tenian la misa probabilidad de aparecer. Razonaba así:

## 6.4.1. La paradoja del caballero de Méré.

En Francia, en el siglo XVII, en los casinos se jugaba a estos dos juegos:

A) Apostar sobre el resultado de que al lanzar cuatro dados apareciera al menos un 6.

B) Apostar sobre el resultado de que en 24 lanzamientos de un par de dados apareciese al menos una vez un doble 6.

El caballero de Méré pensaba que ambos resultados tenian la misa probabilidad de aparecer. Razonaba así:

A) Si lanzo un dado la probabilidad de que aparezca un 6 es un $1/6$. Como lanzo cuatro dados la probabilidad es $4/6 = 2/3$.

B) Si lanzo dos dados la probabilidad de obtener un doble 6 es $1/36$. Como lo hago 24 veces la probabilidad es $24/36 = 2/3$.

## 6.4.1. La paradoja del caballero de Méré.

En Francia, en el siglo XVII, en los casinos se jugaba a estos dos juegos:
A) Apostar sobre el resultado de que al lanzar cuatro dados apareciera al menos un 6.
B) Apostar sobre el resultado de que en 24 lanzamientos de un par de dados apareciese al menos una vez un doble 6.
El caballero de Méré pensaba que ambos resultados tenian la misa probabilidad de aparecer. Razonaba así:
A) Si lanzo un dado la probabilidad de que aparezca un 6 es un $1/6$. Como lanzo cuatro dados la probabilidad es $4/6 = 2/3$.
B) Si lanzo dos dados la probabilidad de obtener un doble 6 es $1/36$. Como lo hago 24 veces la probabilidad es $24/36 = 2/3$.
Sin embargo, los jugadores habian concluido, por experiencia que jugar a A produce más ganancias que jugar a B.

## 6.4.1. La paradoja del caballero de Méré.

En Francia, en el siglo XVII, en los casinos se jugaba a estos dos juegos:
A) Apostar sobre el resultado de que al lanzar cuatro dados apareciera al menos un 6.
B) Apostar sobre el resultado de que en 24 lanzamientos de un par de dados apareciese al menos una vez un doble 6.
El caballero de Méré pensaba que ambos resultados tenian la misa probabilidad de aparecer. Razonaba así:
A) Si lanzo un dado la probabilidad de que aparezca un 6 es un $1/6$. Como lanzo cuatro dados la probabilidad es $4/6 = 2/3$.
B) Si lanzo dos dados la probabilidad de obtener un doble 6 es $1/36$. Como lo hago 24 veces la probabilidad es $24/36 = 2/3$.
Sin embargo, los jugadores habian concluido, por experiencia que jugar a A produce más ganancias que jugar a B. **Calcula las probabilidades en cada caso para mostrar que los jugadores tenían razón.**

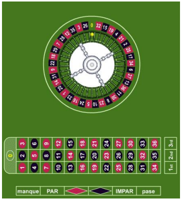
## 6.4.2. El casino nunca pierde.

En un experimento cuyo espacio muestral es $E$, una variable aleatoria es una función $X : E \to \mathbb{R}$ que a cada elemento del espacio muestral $E$ le asocia el valor númerico que nos interesa.

## 6.4.2. El casino nunca pierde.

En un experimento cuyo espacio muestral es $E$, una variable aleatoria es una función $X : E \to \mathbb{R}$ que a cada elemento del espacio muestral $E$ le asocia el valor númerico que nos interesa.

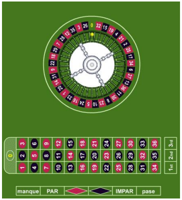
Una ruleta tiene 37 ranuras, de las cuales 18 son **rojas**, 18 **negras** y 1 **verde** (numerada 0). Cuando se gira la ruleta la bola tiene igual probabilidad de caer en cada una de las ranuras. Se pueden hacer muchas apuestas.



## 6.4.2. El casino nunca pierde.

En un experimento cuyo espacio muestral es $E$, una variable aleatoria es una función $X : E \to \mathbb{R}$ que a cada elemento del espacio muestral $E$ le asocia el valor númerico que nos interesa.

Una ruleta tiene 37 ranuras, de las cuales 18 son **rojas**, 18 **negras** y 1 **verde** (numerada 0). Cuando se gira la ruleta la bola tiene igual probabilidad de caer en cada una de las ranuras. Se pueden hacer muchas apuestas.




Una sencilla es elegir **Rojo** o **Negro**. Una apuesta de 1 euro al **Rojo** produce una ganancia de 1 euro si la bola cae en una ranura **roja**. Si cae en una ranura **negra** el croupier sonrie y se lleva tu euro. Si cae en la **verde**, sonrie aún más y se lleva cada euro de todos los participantes.

Sea $X$ la variable aleatoria "ganancias o pérdidas en cada apuesta". Tenemos

$$p(X=1)=\frac{18}{37}, \qquad p(X=-1)=\frac{19}{37}.$$

La media o esperanza de esta variable aleatoria es:

$$\mu = E(X) = 1\times\frac{18}{37}+(-1)\times\frac{19}{37}\approx -0{,}027027\,,$$

y la desviación típica:

$$\sigma_X=\sqrt{(1-\mu)^2\times\frac{18}{37}+(-1-\mu)^2\times\frac{19}{37}}\approx 0{,}999635\,.$$

Sea $X$ la variable aleatoria "ganancias o pérdidas en cada apuesta". Tenemos

$$p(X=1)=\frac{18}{37}, \qquad p(X=-1)=\frac{19}{37}.$$

La media o esperanza de esta variable aleatoria es:

$$\mu = E(X) = 1\times\frac{18}{37}+(-1)\times\frac{19}{37}\approx -0,027027\,,$$

y la desviación típica:

$$\sigma_X=\sqrt{(1-\mu)^2\times\frac{18}{37}+(-1-\mu)^2\times\frac{19}{37}}\approx 0,999635\,.$$

**Por cada euro apostado se pierde, en media, 2,7 céntimos .**

Supongamos ahora que se repite la misma variable aleatoria $n$ veces, como sucesos independientes. Sea $X_i = X$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Estamos interesados en la variable aleatoria $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, que mide las ganancias o pérdidas después de $n$ apuestas.

Supongamos ahora que se repite la misma variable aleatoria $n$ veces, como sucesos independientes. Sea $X_i = X$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Estamos interesados en la variable aleatoria $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, que mide las ganancias o pérdidas después de $n$ apuestas.
Si un jugador hace 100 apuestas al **Rojo** en una noche se tiene

$$E(S_{100}) = 100E(X) \approx -2,7027, \; \sigma_{S_{100}} = \sqrt{100}\sigma_X \approx 9,99685.$$

Supongamos ahora que se repite la misma variable aleatoria $n$ veces, como sucesos independientes. Sea $X_i = X$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Estamos interesados en la variable aleatoria $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, que mide las ganancias o pérdidas después de $n$ apuestas.
Si un jugador hace 100 apuestas al **Rojo** en una noche se tiene

$$E(S_{100}) = 100E(X) \approx -2,7027, \ \sigma_{S_{100}} = \sqrt{100}\sigma_X \approx 9,99685.$$

**El jugador pierde en media, después de 100 apuestas, 2,7 euros.**

Supongamos ahora que se repite la misma variable aleatoria $n$ veces, como sucesos independientes. Sea $X_i = X$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Estamos interesados en la variable aleatoria $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, que mide las ganancias o pérdidas después de $n$ apuestas.
Si un jugador hace 100 apuestas al **Rojo** en una noche se tiene

$$E(S_{100}) = 100E(X) \approx -2,7027, \ \sigma_{S_{100}} = \sqrt{100}\sigma_X \approx 9,99685.$$

**El jugador pierde en media, después de 100 apuestas, 2,7 euros.**
Como $S$ sigue una distribución normal, con la regla del 99,7 %, las ganancias o pérdidas de un jugador en 100 apuestas estarán dentro de 3 desviaciones típicas de la media, es decir, entre

$$-2,7027 - 3 \times 9,99635 \approx -32,69 \text{ euros}$$

y

$$-2,7027 + 3 \cdot 9,99635 \approx 27,29 \text{ euros}.$$

Pero en el casino hay muchos jugadores. Supongamos que en total se han hecho 100.000 apuestas. En este caso(para el casino):

Pero en el casino hay muchos jugadores. Supongamos que en total se han hecho 100.000 apuestas. En este caso(para el casino):

$$E(S_{100,000}) = 100,000 E(X) \approx 2702,7,$$

$$\sigma_{S_{100,000}} = \sqrt{100,000}\sigma_X \approx 316,11.$$

Pero en el casino hay muchos jugadores. Supongamos que en total se han hecho 100.000 apuestas. En este caso(para el casino):

$$E(S_{100,000}) = 100{,}000E(X) \approx 2702,7,$$

$$\sigma_{S_{100,000}} = \sqrt{100{,}000}\sigma_X \approx 316,11.$$

**El casino gana en media 2702,7 euros.**

Pero en el casino hay muchos jugadores. Supongamos que en total se han hecho 100.000 apuestas. En este caso(para el casino):

$$E(S_{100,000}) = 100{,}000 E(X) \approx 2702,7,$$

$$\sigma_{S_{100,000}} = \sqrt{100{,}000}\sigma_X \approx 316,11.$$

**El casino gana en media 2702,7 euros.**

Como $S$ sigue una distribución normal, con la regla del 99,7 %, las ganancias del casino en 100.000 apuestas estarán dentro de 3 desviaciones típicas de la media, es decir, entre

$$2702,7 - 3 \times 316,11 \approx 1754'37 \text{ euros}$$

y

$$2702,7 + 3 \cdot 316,11 \approx 3651,03 \text{ euros}.$$

Pero en el casino hay muchos jugadores. Supongamos que en total se han hecho 100.000 apuestas. En este caso(para el casino):

$$E(S_{100,000}) = 100{,}000E(X) \approx 2702,7,$$

$$\sigma_{S_{100,000}} = \sqrt{100{,}000}\sigma_X \approx 316,11.$$

**El casino gana en media 2702,7 euros.**

Como $S$ sigue una distribución normal, con la regla del 99,7 %, las ganancias del casino en 100.000 apuestas estarán dentro de 3 desviaciones típicas de la media, es decir, entre

$$2702,7 - 3 \times 316,11 \approx 1754'37 \text{ euros}$$

y

$$2702,7 + 3 \cdot 316,11 \approx 3651,03 \text{ euros.}$$

Pero en el casino hay muchos jugadores. Supongamos que en total se han hecho 100.000 apuestas. En este caso(para el casino):

$$E(S_{100,000}) = 100{,}000 E(X) \approx 2702,7,$$

$$\sigma_{S_{100,000}} = \sqrt{100{,}000}\sigma_X \approx 316,11.$$

**El casino gana en media 2702,7 euros.**

Como $S$ sigue una distribución normal, con la regla del 99,7 %, las ganancias del casino en 100.000 apuestas estarán dentro de 3 desviaciones típicas de la media, es decir, entre

$$2702,7 - 3 \times 316,11 \approx 1754'37 \text{ euros}$$

y

$$2702,7 + 3 \cdot 316,11 \approx 3651,03 \text{ euros}.$$

**El casino gana casi todas las veces entre 1754,37 y 3651,03 euros.**

## 6.4.3. Método de Montecarlo.

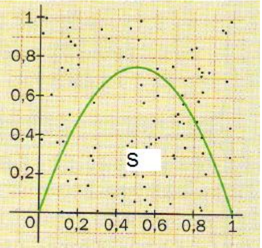
## 6.4.3. Método de Montecarlo.

El método de Montecarlo puede usarse para aproximar el área de una región $S$ situada en un cuadrado unidad delimitada por la gráfica de una función $f$.

## 6.4.3. Método de Montecarlo.

El método de Montecarlo puede usarse para aproximar el área de una región $S$ situada en un cuadrado unidad delimitada por la gráfica de una función $f$.

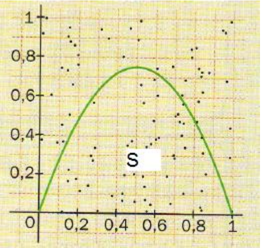
Se genera al azar un punto (dos coordenadas) en el cuadrado unidad. La proporción de puntos que cae dentro de la región $S$ es una aproximación del área de la gráfica.



## 6.4.3. Método de Montecarlo.

El método de Montecarlo puede usarse para aproximar el área de una región $S$ situada en un cuadrado unidad delimitada por la gráfica de una función $f$.

Se genera al azar un punto (dos coordenadas) en el cuadrado unidad. La proporción de puntos que cae dentro de la región $S$ es una aproximación del área de la gráfica.




Esta técnica se puede generalizar para calcular $A(S) = \int_a^b f(x)\,dx$, donde $f$ es una función positiva y continua en el intervalo $[a, b]$

## 6.4.4. Probabilidad geométrica: la aguja de Buffon.

## 6.4.4. Probabilidad geométrica: la aguja de Buffon.

El problema de la aguja de Buffon es un problema de probabilidad geométrica de sencilla realización y que permite aproximar el valor de $\pi$. Fue resuelto en 1777 por el naturalista francés Buffon.

## 6.4.4. Probabilidad geométrica: la aguja de Buffon.

El problema de la aguja de Buffon es un problema de probabilidad geométrica de sencilla realización y que permite aproximar el valor de $\pi$. Fue resuelto en 1777 por el naturalista francés Buffon.

Se trata de lanzar una aguja de longitud $\ell$ sobre una trama de papel en la que se han trazado rectas paralelas distanciadas entre sí una distancia $\ell$

## 6.4.4. Probabilidad geométrica: la aguja de Buffon.

El problema de la aguja de Buffon es un problema de probabilidad geométrica de sencilla realización y que permite aproximar el valor de $\pi$. Fue resuelto en 1777 por el naturalista francés Buffon.

Se trata de lanzar una aguja de longitud $\ell$ sobre una trama de papel en la que se han trazado rectas paralelas distanciadas entre sí una distancia $\ell$

**PROBLEMA DE LA AGUJA DE BUFFON**

El problema es calcular la probabilidad de que al lanzar la aguja, ésta cruce alguna de las líneas del papel.

## 6.4.4. Probabilidad geométrica: la aguja de Buffon.

El problema de la aguja de Buffon es un problema de probabilidad geométrica de sencilla realización y que permite aproximar el valor de $\pi$. Fue resuelto en 1777 por el naturalista francés Buffon.

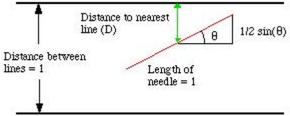
Se trata de lanzar una aguja de longitud $\ell$ sobre una trama de papel en la que se han trazado rectas paralelas distanciadas entre sí una distancia $\ell$

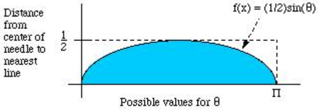
**PROBLEMA DE LA AGUJA DE BUFFON**

El problema es calcular la probabilidad de que al lanzar la aguja, ésta cruce alguna de las líneas del papel.

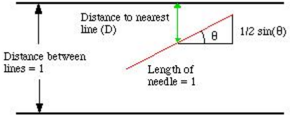
Java applet: *mste.illinois.edu/reese/buffon/buffon.html*

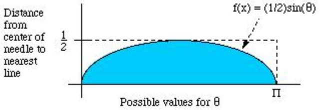
Tomar $\ell = 1$. Hay dos variables, el ángulo $\alpha$ con el que cae la aguja y la distancia del centro de la aguja la linea más cercana, *d*. Tenemos $0 \leq d < 1/2$ y $0 \leq \alpha \leq \pi$. La aguja cruzará una línea del papel cuando $d \leq (1/2)\operatorname{sen}\alpha$ . Esto sucederá cuando *d* esté en la región sombreada de la figura de la derecha.



Tomar $\ell = 1$. Hay dos variables, el ángulo $\alpha$ con el que cae la aguja y la distancia del centro de la aguja la linea más cercana, $d$. Tenemos $0 \leq d < 1/2$ y $0 \leq \alpha \leq \pi$. La aguja cruzará una línea del papel cuando $d \leq (1/2)\operatorname{sen}\alpha$ . Esto sucederá cuando $d$ esté en la región sombreada de la figura de la derecha.

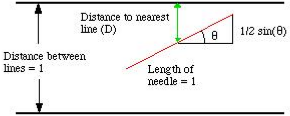


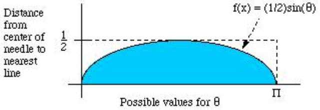




La probabilidad de que esto pase es:

$$\frac{\int_0^\pi \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha}{\pi/2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha = \frac{2}{\pi}\,.$$

Tomar $\ell = 1$. Hay dos variables, el ángulo $\alpha$ con el que cae la aguja y la distancia del centro de la aguja la linea más cercana, $d$. Tenemos $0 \leq d < 1/2$ y $0 \leq \alpha \leq \pi$. La aguja cruzará una línea del papel cuando $d \leq (1/2)\operatorname{sen}\alpha$ . Esto sucederá cuando $d$ esté en la región sombreada de la figura de la derecha.




La probabilidad de que esto pase es:

$$\frac{\int_0^\pi \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha}{\pi/2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha = \frac{2}{\pi}.$$

Si lanzamos la aguja $N$ veces y obtenemos $A$ cortes, se tiene $\frac{A}{N} \approx \frac{2}{\pi}$ y por tanto $\pi$ puede aproximarse por $2N/A$ cuando se hacen muchas pruebas.