5. OPTIMIZACIÓN

Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR EN MATEMÁTICAS
Curso 2011-2012

5.1. Existencia de valores óptimos.

5.1. Existencia de valores óptimos.

Optimizar (RAE): *Buscar la mejor manera de realizar una actividad.*

5.1. Existencia de valores óptimos.

Optimizar (RAE): *Buscar la mejor manera de realizar una actividad.*

1. Si la actividad puede modelizarse con una función de una o varias variables, optimizar requiere hallar el menor o el mayor valor de la función para los valores admisibles de las variables.

5.1. Existencia de valores óptimos.

Optimizar (RAE): *Buscar la mejor manera de realizar una actividad.*

1. Si la actividad puede modelizarse con una función de una o varias variables, optimizar requiere hallar el menor o el mayor valor de la función para los valores admisibles de las variables.

2. No todos los problemas de optimización tienen solución: maximizar la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en el intervalo $[0, 1)$ no tiene solución porque $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \infty$.

5.1. Existencia de valores óptimos.

Optimizar (RAE): *Buscar la mejor manera de realizar una actividad.*

1. Si la actividad puede modelizarse con una función de una o varias variables, optimizar requiere hallar el menor o el mayor valor de la función para los valores admisibles de las variables.

2. No todos los problemas de optimización tienen solución: maximizar la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en el intervalo $[0, 1)$ no tiene solución porque $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \infty$.

TEOREMA DE WEIERSTRASS

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ($[a, b]$ es un intervalo cerrado y acotado) y f es continua, existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo $x \in [a, b]$ (es decir, $f(x_1)$ es el valor mínimo de f y $f(x_2)$ es el valor máximo de f en $[a, b]$).

Demuestra el siguiente corolario del Teorema de Weierstrass

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$. Existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (es decir, $f(x_0)$ es el valor mínimo de f en $\mathbb{R}$).

Demuestra el siguiente corolario del Teorema de Weierstrass

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (es decir, $f(x_0)$ es el valor mínimo de f en $\mathbb{R}$).

Para funciones de variables variables se tiene

Teorema de Weierstrass (varias variables)

Sea $A \in \mathbb{R}^n$ compacto (cerrado y acotado) y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en A. Existen $x_1, x_2 \in A$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo $x \in A$ (es decir, $f(x_1)$ es el valor mínimo de f y $f(x_2)$ es el valor máximo de f en A).

Demuestra el siguiente corolario del Teorema de Weierstrass

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (es decir, $f(x_0)$ es el valor mínimo de f en $\mathbb{R}$).

Para funciones de variables variables se tiene

Teorema de Weierstrass (varias variables)

Sea $A \in \mathbb{R}^n$ compacto (cerrado y acotado) y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en A. Existen $x_1, x_2 \in A$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo $x \in A$ (es decir, $f(x_1)$ es el valor mínimo de f y $f(x_2)$ es el valor máximo de f en A).

Para funciones de varias variables se puede escribir un resultado similar al del corolario anterior.

5.2. Un método para optimizar.

5.2. Un método para optimizar.

1. Formulación del problema: Hallar la fórmula que rige el fenómeno planteado. Se debe conseguir una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ y describir de manera precisa el conjunto A.

5.2. Un método para optimizar.

1. Formulación del problema: Hallar la fórmula que rige el fenómeno planteado. Se debe conseguir una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ y describir de manera precisa el conjunto A.

2. Discusión: Mostrar que la función tiene un valor óptimo usando el teorema de Weierstrass o cualquiera de sus variantes.

1. Formulación del problema: Hallar la fórmula que rige el fenómeno planteado. Se debe conseguir una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ y describir de manera precisa el conjunto A.

2. Discusión: Mostrar que la función tiene un valor óptimo usando el teorema de Weierstrass o cualquiera de sus variantes.

3. Hallar los extremos locales: En el conjunto en el que la función f tenga derivada o existan sus derivadas parciales, hallar los extremos locales resolviendo el sistema (o una ecuación si $n = 1$)

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

4. Solución: Hallar la solución entre los siguientes valores de f:

4.1: Los valores de f en los extremos locales.

4.2: Entre los puntos en los que no sea derivable.

4.3: En los puntos de la frontera de A (puede requerir opitimizar f sobre su frontera).

De todos estos el que produzca el mayor valor es el máximo (si existe) y el que produzca el menor valor es el mínimo (si existe).

4. Solución: Hallar la solución entre los siguientes valores de f:

4.1: Los valores de f en los extremos locales.

4.2: Entre los puntos en los que no sea derivable.

4.3: En los puntos de la frontera de A (puede requerir opitimizar f sobre su frontera).

De todos estos el que produzca el mayor valor es el máximo (si existe) y el que produzca el menor valor es el mínimo (si existe).

NOTA:: No es necesario calcular la segunda derivada, ni el hessiano de la función en el caso de varias variables, ya que estamos interesados en extremos globales y no locales.

Definición: función cóncava hacia arriba

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. La función f es cóncava hacia arriba si para todo $x_1, x_2 \in A$ se tiene

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq t\, f(x_2) + (1-t)f(x_1)\,.$$

Definición: función cóncava hacia arriba

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. La función f es cóncava hacia arriba si para todo $x_1, x_2 \in A$ se tiene

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq t\,f(x_2) + (1-t)f(x_1)\,.$$

Definición: función cóncava hacia abajo

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. La función f es cóncava hacia abajo si para todo $x_1, x_2 \in A$ se tiene

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \geq t\,f(x_2) + (1-t)f(x_1)\,.$$

Definición: función cóncava hacia arriba

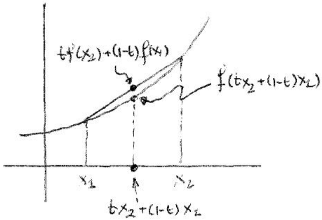
Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. La función f es cóncava hacia arriba si para todo $x_1, x_2 \in A$ se tiene

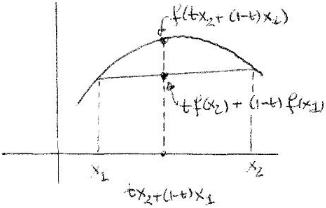
$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq t\,f(x_2) + (1-t)f(x_1)\,.$$

Definición: función cóncava hacia abajo

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. La función f es cóncava hacia abajo si para todo $x_1, x_2 \in A$ se tiene

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \geq t\,f(x_2) + (1-t)f(x_1)\,.$$





PROPOSICION 1

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ cóncava hacia arriba tal que $f \in C^1(A)$. Si existe $c \in A$ tal que $f'(c) = 0$, f alcanza en c su mínimo global.

Proposicion 1

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ cóncava hacia arriba tal que $f \in C^1(A)$. Si existe $c \in A$ tal que $f'(c) = 0$, f alcanza en c su mínimo global.

Proposicion 2

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ cóncava hacia abajo tal que $f \in C^1(A)$. Si existe $c \in A$ tal que $f'(c) = 0$, f alcanza en c su máximo global.

Ejercicio 1. De todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio R, hallar el de mayor área.

Ejercicio 1. De todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio R, hallar el de mayor área.

Ejercicio 2. Queremos construir una lata cilíndrica para comercializar un producto. La soldadura de la hojalata se ha puesto muy cara. Queremos que la lata tenga un volumen de 1 litro con el mínimo gasto de soldadura posible ¿Que dimensiones debe tener la lata?

Ejercicio 1. De todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio R, hallar el de mayor área.

Ejercicio 2. Queremos construir una lata cilíndrica para comercializar un producto. La soldadura de la hojalata se ha puesto muy cara. Queremos que la lata tenga un volumen de 1 litro con el mínimo gasto de soldadura posible ¿Que dimensiones debe tener la lata?

Ejercicio 3. Hallar las coordenadas del punto $P = (x, y)$ cuya suma de los cuadrados de las distancias a tres puntos fijos $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ y $C = (c_1, c_2)$ sea mínima.

5.3.1. MOVIÉNDOSE POR EL CAMINO MÁS CORTO. EL PROBLEMA DE HERÓN.

5.3.1. MOVIÉNDOSE POR EL CAMINO MÁS CORTO. EL PROBLEMA DE HERÓN.

Dos pueblos situados cerca de la playa desean construir una carretera que los una pasando por la playa, de manera que les quede el camino mas corto posible. Es decir, deben minimizar la longitud de la carretera, que deberá pasar por la playa.

5.3.1. MOVIÉNDOSE POR EL CAMINO MÁS CORTO. EL PROBLEMA DE HERÓN.

Dos pueblos situados cerca de la playa desean construir una carretera que los una pasando por la playa, de manera que les quede el camino mas corto posible. Es decir, deben minimizar la longitud de la carretera, que deberá pasar por la playa.

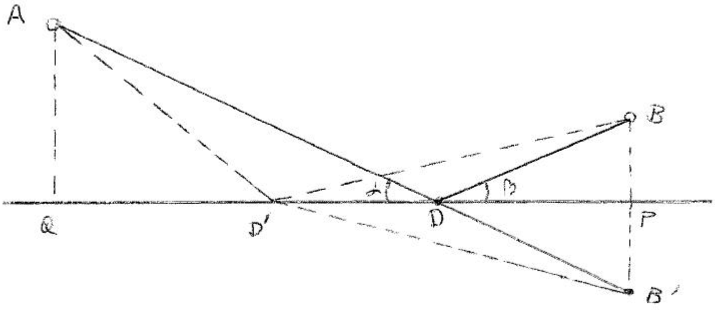
NOTA: En su formulación matemática, este es uno de los problemas mas antiguo. Se atribuye a Herón por las referencias que de ello han quedado en varios libros, aunque no se conoce el texto en que Herón lo formuló.

La elegante solucíón geométrica utiliza el método de reflexión o de simetría.

El punto D de contacto de la carretera con la playa debe ser tal que los ángulos α y β de la figura sean iguales.

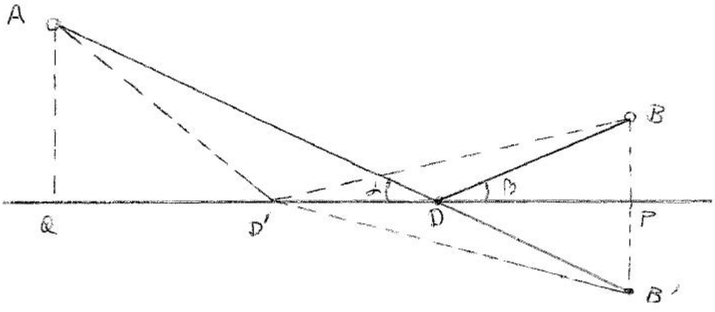
La elegante solucíón geométrica utiliza el método de reflexión o de simetría.

El punto D de contacto de la carretera con la playa debe ser tal que los ángulos α y β de la figura sean iguales.



La elegante solucíón geométrica utiliza el método de reflexión o de simetría.

El punto D de contacto de la carretera con la playa debe ser tal que los ángulos α y β de la figura sean iguales.



Ejercicio 4. Resuelve el problema de Herón de manera analítica.

5.3.2. GASTANDO MENOS ENERGÍA. EL PROBLEMA DE FERMAT.

Tres pueblos del desierto de Arizona, Hickory (H), Nickory (N) y Mickory (M), situados formando un triángulo acutángulo, han decidido construir una escuela de manera que el combustible que gasten los autobuses para acercar a los estudiantes diariamente hasta la escuela sea el menor posible. ¿Cuál debería ser el punto P en el que debería situarse la escuela?

5.3.2. GASTANDO MENOS ENERGÍA.
EL PROBLEMA DE FERMAT.

Tres pueblos del desierto de Arizona, Hickory (H), Nickory (N) y Mickory (M), situados formando un triángulo acutángulo, han decidido construir una escuela de manera que el combustible que gasten los autobuses para acercar a los estudiantes diariamente hasta la escuela sea el menor posible. ¿Cuál debería ser el punto P en el que debería situarse la escuela?

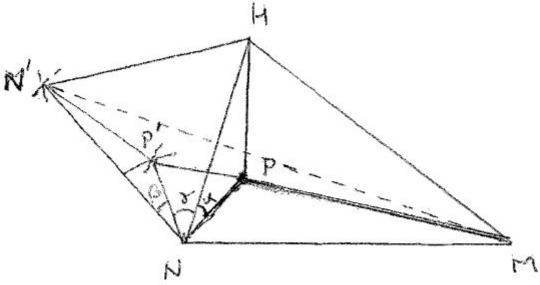
NOTA: El primer trabajo publicado sobre optimización, *Acerca de valores máximos y mínimos* de Viviani (1659), trataba este problema. También Torricelli y Cavalieri, estudiantes, al igual que Viviani, de Galileo, trataron este problema.

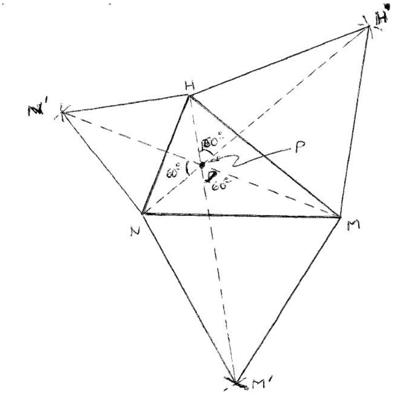
Ejercicio 5. Hacer un razonamiento geométrico que demuestre que si P está fuera del triángulo que forman los tres pueblos, no es rentable construir la escuela en P.

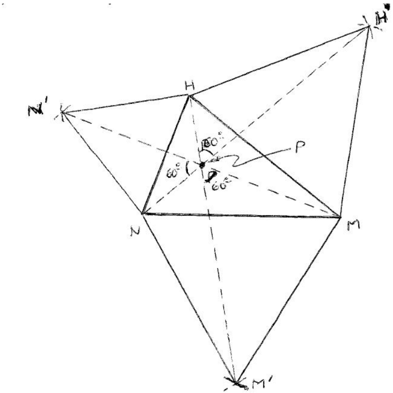
Ejercicio 5. Hacer un razonamiento geométrico que demuestre que si P está fuera del triángulo que forman los tres pueblos, no es rentable construir la escuela en P.

Hay una elegante solución geométrica:

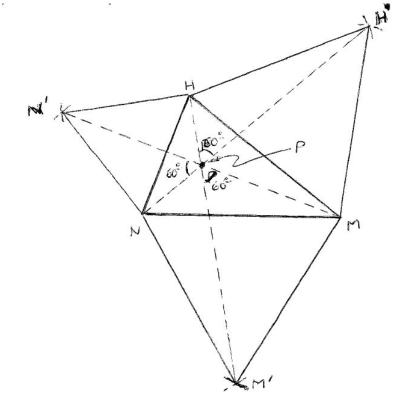
La escuela debe situarse en un lugar P tal que el ángulo bajo el cual se ven Nickory, Hickory y Mickery desde P sea 120º.




H'
H
N'
P
60°
60°
60°
N
M
M'



NOTA: El punto *P* en el que hay que situar la escuela se llama punto de Fermat del triángulo *HNM* y la demostración dada anteriormente nos dice como se construye.



NOTA: El punto *P* en el que hay que situar la escuela se llama punto de Fermat del triángulo *HNM* y la demostración dada anteriormente nos dice como se construye.

Ejercicio 6. Resuelve el problema de Fermat de manera analítica.

5.3.3. EL ÁREA MÁXIMA CON PERÍMETRO FIJO. PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO O PROBLEMA DE DIDO.

De todas las curvas cerradas planas de una longitud dada, describir la que encierra mayor área.

5.3.3. EL ÁREA MÁXIMA CON PERÍMETRO FIJO. PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO O PROBLEMA DE DIDO.

De todas las curvas cerradas planas de una longitud dada, describir la que encierra mayor área.

Ejercicio 7. Demostrar que la curva que encierre mayor área debe encerrar una figura convexa.

5.3.3. EL ÁREA MÁXIMA CON PERÍMETRO FIJO. PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO O PROBLEMA DE DIDO.

De todas las curvas cerradas planas de una longitud dada, describir la que encierra mayor área.

Ejercicio 7. Demostrar que la curva que encierre mayor área debe encerrar una figura convexa.

Ejercicio 8. De un triángulo equilátero, un cuadrado, un hexágono regular y una circunferencia, todos ellos de perímetro fijo p, ¿cuál es el que encierra mayor área?

5.3.3. EL ÁREA MÁXIMA CON PERÍMETRO FIJO. PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO O PROBLEMA DE DIDO.

De todas las curvas cerradas planas de una longitud dada, describir la que encierra mayor área.

Ejercicio 7. Demostrar que la curva que encierre mayor área debe encerrar una figura convexa.

Ejercicio 8. De un triángulo equilátero, un cuadrado, un hexágono regular y una circunferencia, todos ellos de perímetro fijo p, ¿cuál es el que encierra mayor área?

El problema de Dido para triángulos

Ejercicio 9. De todos los triángulos con uno de sus lados fijo, y de perímetro dado, prueba que el de mayor área es el que tiene los otros dos lados iguales (es decir, el triángulo es isósceles).

5.3.3. EL ÁREA MÁXIMA CON PERÍMETRO FIJO. PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO O PROBLEMA DE DIDO.

De todas las curvas cerradas planas de una longitud dada, describir la que encierra mayor área.

Ejercicio 7. Demostrar que la curva que encierre mayor área debe encerrar una figura convexa.

Ejercicio 8. De un triángulo equilátero, un cuadrado, un hexágono regular y una circunferencia, todos ellos de perímetro fijo p, ¿cuál es el que encierra mayor área?

El problema de Dido para triángulos

Ejercicio 9. De todos los triángulos con uno de sus lados fijo, y de perímetro dado, prueba que el de mayor área es el que tiene los otros dos lados iguales (es decir, el triángulo es isósceles).

Ejercicio 10. De todos los triángulos con perímetro fijo, prueba que el de mayor área es el que tiene todos sus lados iguales (es decir, el triángulo equilátero).

El problema de Dido para cuadriláteros.

Ejercicio 11. El cuadrilátero de perímetro fijo y de mayor área debe tener todos sus lados iguales y debe ser un cuadrado.

El problema de Dido para cuadriláteros.

Ejercicio 11. El cuadrilátero de perímetro fijo y de mayor área debe tener todos sus lados iguales y debe ser un cuadrado.

El problema de Dido para un polígono de n lados.

Al igual que en el ejercicio 11, puede demostrarse que de todos los polígonos de n lados con perímetro fijo, el de mayor área debe tener todos sus lados iguales.

Resulta más difícil probar que de todos ellos el de mayor área es el polígono regular (ver V.M. Tickhomirov, *Stories about maxima and minima*, Mathematical World, Vol. 1, AMS and MAA, (1990).

El problema de Dido para una curva regular cerrada

Cociente isoperimétrico

Dada una curva cerrada de perímetro p que encierra área A se llama cociente isoperimétrico al numero $CI = 4\pi A/p^2$.

El problema de Dido para una curva regular cerrada

COCIENTE ISOPERIMÉTRICO

Dada una curva cerrada de perímetro p que encierra área A se llama cociente isoperimétrico al numero $CI = 4\pi A/p^2$.

Ejercicio 12. Demuestra que el cociente isoperimétrico de una circunferencia es 1 y que el cociente isoperimétrico de un polígono regular de n lados es $\pi/(n\tan(\pi/n))$.

El problema de Dido para una curva regular cerrada

Cociente isoperimétrico

Dada una curva cerrada de perímetro p que encierra área A se llama cociente isoperimétrico al numero $CI = 4\pi A/p^2$.

Ejercicio 12. Demuestra que el cociente isoperimétrico de una circunferencia es 1 y que el cociente isoperimétrico de un polígono regular de n lados es $\pi/(n\tan(\pi/n))$.

Curva cerrada regular

Una curva cerrada de perímetro p^* y área A^* se dice regular si para todo $\epsilon > 0$ existe un polígono de n lados (n depende de ϵ) de perímetro p_n y área A_n tal que $0 \leq p_n - p^* < \epsilon$ y $0 \leq A^* - A < \epsilon$.

El problema de Dido para una curva regular cerrada

Cociente isoperimétrico

Dada una curva cerrada de perímetro p que encierra área A se llama cociente isoperimétrico al numero $CI = 4\pi A/p^2$.

Ejercicio 12. Demuestra que el cociente isoperimétrico de una circunferencia es 1 y que el cociente isoperimétrico de un polígono regular de n lados es $\pi/(n\tan(\pi/n))$.

Curva cerrada regular

Una curva cerrada de perímetro p^* y área A^* se dice regular si para todo $\epsilon > 0$ existe un polígono de n lados (n depende de ϵ) de perímetro p_n y área A_n tal que $0 \leq p_n - p^* < \epsilon$ y $0 \leq A^* - A < \epsilon$.

Ejercicio 13. De todas las curvas regulares de perímetro fijo la que encierra mayor área es la circunferencia.