

# 4. GEOMETRÍA // 4.3. PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS.

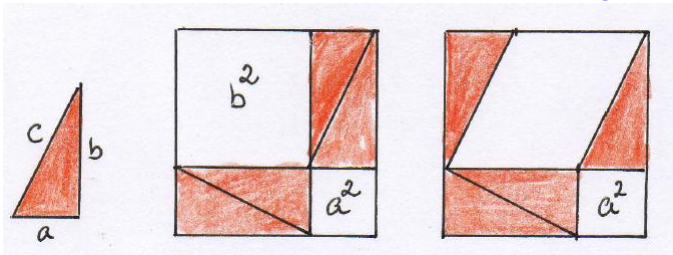
Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR  
EN MATEMÁTICAS  
Curso 2011-2012

## 4.3.1. Dos nuevas demostraciones del teorema de Pitágoras.

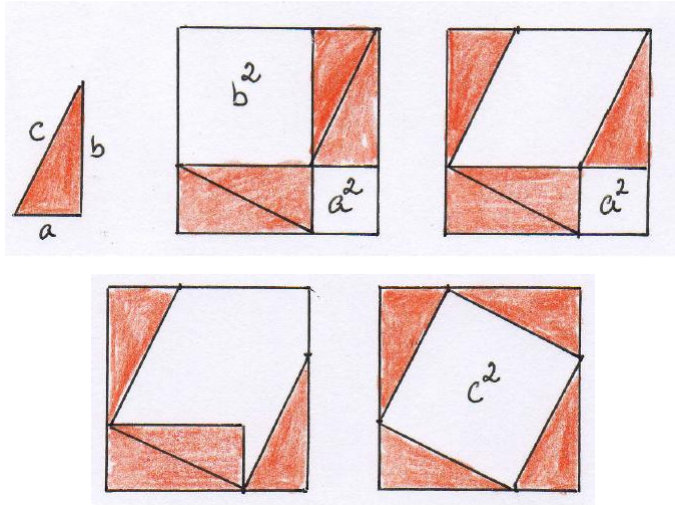
## 4.3.1. Dos nuevas demostraciones del teorema de Pitágoras.

### La demostración china del teorema de Pitágoras



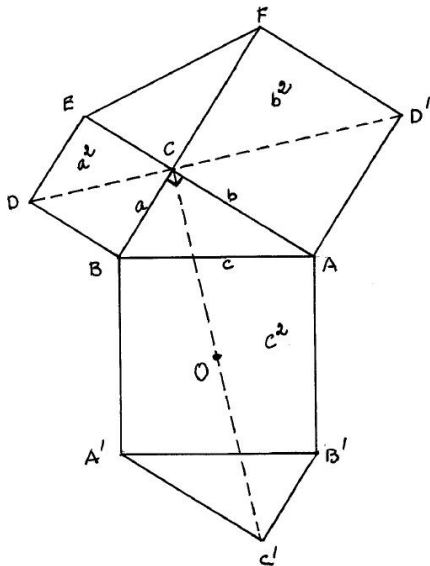
# 4.3.1. Dos nuevas demostraciones del teorema de Pitágoras.

## La demostración china del teorema de Pitágoras



# La demostración de Leonardo da Vinci (1452-1519) del teorema de Pitágoras

# La demostración de Leonardo da Vinci (1452-1519) del teorema de Pitágoras



## 4.3.2. La geometría del triángulo.

### MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

La **mediatriz** de un segmento  $AB$  es la recta perpendicular a  $AB$  que pasa por su punto medio. Todos los puntos de la mediatriz están a igual distancia de los extremos  $A$  y  $B$  del segmento.

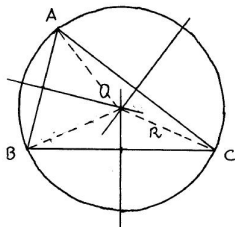
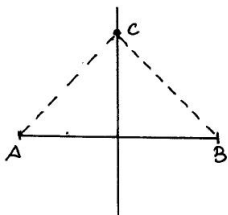
## 4.3.2. La geometría del triángulo.

### MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

La **mediatriz** de un segmento  $AB$  es la recta perpendicular a  $AB$  que pasa por su punto medio. Todos los puntos de la mediatriz están a igual distancia de los extremos  $A$  y  $B$  del segmento.

### CIRCUNCENTRO

Las tres **mediatrices** de los lados de un triángulo concurren en un punto  $O$ , llamado **circuncentro**, que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.





## BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

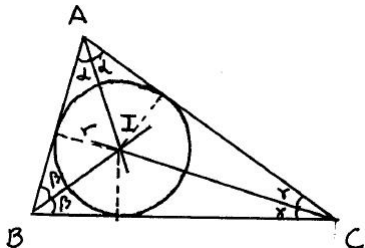
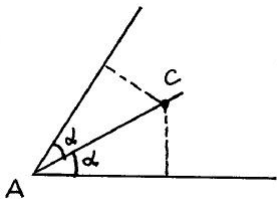
La **bisectriz** de un ángulo es la semirrecta que divide al ángulo en dos ángulos iguales. Todos los puntos de la bisectriz están a igual distancia de los lados del ángulo.

## BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

La **bisectriz** de un ángulo es la semirrecta que divide al ángulo en dos ángulos iguales. Todos los puntos de la bisectriz están a igual distancia de los lados del ángulo.

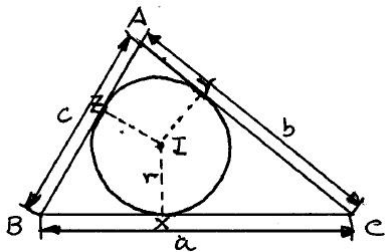
## INCENTRO

Las tres **bisectrices** de los ángulos de un triángulo concurren en un punto  $I$ , llamado **incentro**, que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.



**Ejercicio 1.** Sean  $X, Y, Z$  los puntos en los que la circunferencia inscrita toca a los lados de un triángulo  $ABC$ . Si  $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$  es el semiperímetro del triángulo, demostrar que se cumple:

$$\overline{AZ} = \overline{AY} = s - a, \quad \overline{BX} = \overline{BZ} = s - b, \quad \overline{CX} = \overline{CY} = s - c.$$



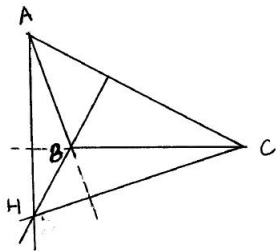
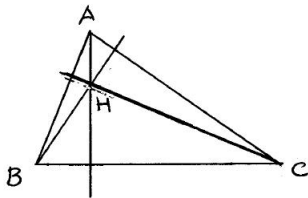
**Ejercicio 2.** Demostrar que el área de un triángulo es el producto del semiperímetro  $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$  por el radio de la circunferencia inscrita.

## ALTURAS DE UN TRIÁNGULO

Las **alturas** de un triángulo son las rectas trazadas desde cada vértice perpendicularmente al lado opuesto.

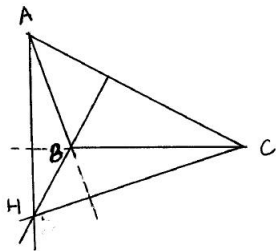
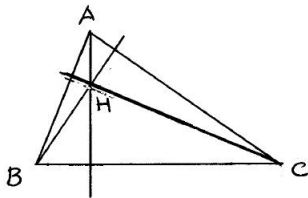
## ALTURAS DE UN TRIÁNGULO

Las **alturas** de un triángulo son las rectas trazadas desde cada vértice perpendicularmente al lado opuesto.



## ALTURAS DE UN TRIÁNGULO

Las **alturas** de un triángulo son las rectas trazadas desde cada vértice perpendicularmente al lado opuesto.



Es sorprendente que las tres alturas de un triángulo también concurren en un punto. Einstein confesaba su sorpresa antes este hecho y ante la ingenuidad de su demostración.

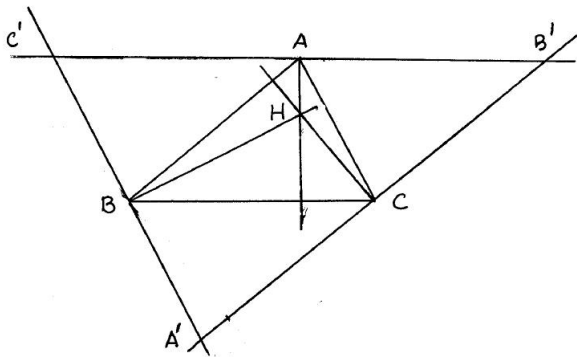
## ORTOCENTRO

Las tres **alturas** de un triángulo concurren en un punto  $H$ , llamado **ortocentro**.

## ORTOCENTRO

Las tres **alturas** de un triángulo concurren en un punto  $H$ , llamado **ortocentro**.

D./



Las alturas del triángulo  $ABC$  son las mediatrices del triángulo  $A'B'C'$ . ■

Referencia: P. Puig Adam, Geometría métrica, Tomo I.



## MEDIANAS DE UN TRIÁNGULO

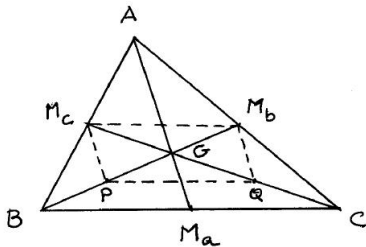
Las **medianas** son las rectas trazadas desde cada vértice que pasan por el punto medio del lado opuesto.

## BARICENTRO O CENTRO DE GRAVEDAD DE UN TRIÁNGULO

Las tres **medianas** de un triángulo  $ABC$  concurren en un punto  $G$ , llamado **baricentro**. Se cumple que

$$\overline{GM_a} = \frac{1}{3}\overline{AM_a}, \quad \overline{GM_b} = \frac{1}{3}\overline{BM_b}, \quad \overline{GM_c} = \frac{1}{3}\overline{CM_c}.$$

D./



## CEVIANA DE UN TRIÁNGULO

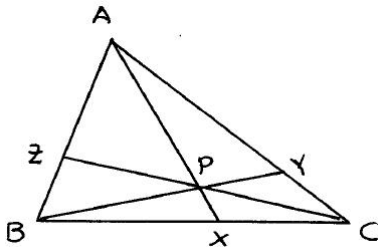
Una **ceviana** de un triángulo es cualquier segmento que une un vértice de un triángulo con cualquier punto de su lado opuesto.

## TEOREMA DE CEVA

Sean  $AX$ ,  $BY$  y  $CZ$  tres medianas de un triángulo, una por cada vértice del triángulo  $ABC$ . Son equivalentes:

1. Las tres cevianas son concurrentes.

2. 
$$\frac{BX}{XC} \times \frac{CY}{YA} \times \frac{AZ}{ZB} = 1$$

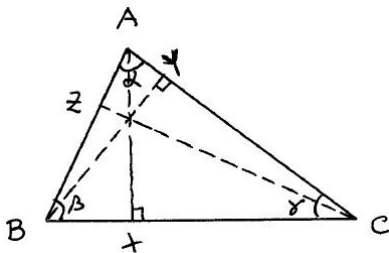


**Ejercicio 3.** Usar el teorema de Ceva para demostrar que las medianas de un triángulo son concurrentes.

**Ejercicio 3.** Usar el teorema de Ceva para demostrar que las medianas de un triángulo son concurrentes.

**Ejercicio 4.** Usar el teorema de Ceva para demostrar que las alturas de un triángulo acutángulo son concurrentes.

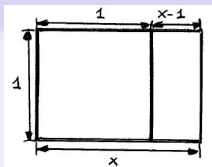
(Indicación: Usar los cosenos de los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  de la figura)



## 4.3.3. El pentágono regular y el número aureo .

### EL NÚMERO AUREO

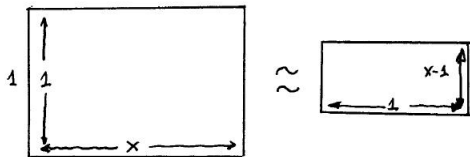
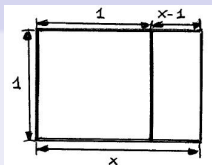
El número aureo es la longitud de un rectángulo de altura 1 tal que al quitarle un cuadrado de lado 1 queda un rectángulo más pequeño congruente con el original.



## 4.3.3. El pentágono regular y el número aureo .

### EL NÚMERO AUREO

El número aureo es la longitud de un rectángulo de altura 1 tal que al quitarle un cuadrado de lado 1 queda un rectángulo más pequeño congruente con el original.

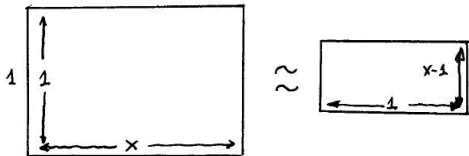
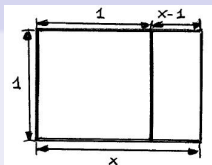


$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}.$$

## 4.3.3. El pentágono regular y el número aureo .

### EL NÚMERO AUREO

El número aureo es la longitud de un rectángulo de altura 1 tal que al quitarle un cuadrado de lado 1 queda un rectángulo más pequeño congruente con el original.



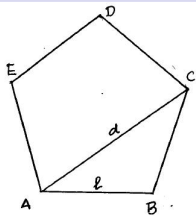
$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} .$$

El número aureo es  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$

## LA DIAGONAL DE UN PENTÁGONO REGULAR

La relación entre la longitud,  $d$ , de la diagonal de un pentágono regular y la longitud de su lado,  $l$ , es el número aureo

$$\frac{d}{l} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

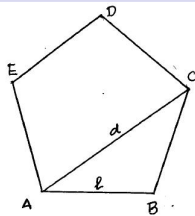




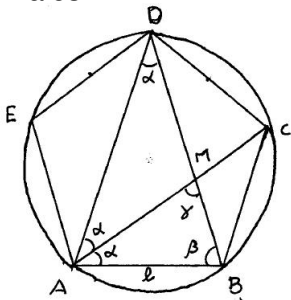
## LA DIAGONAL DE UN PENTÁGONO REGULAR

La relación entre la longitud,  $d$ , de la diagonal de un pentágono regular y la longitud de su lado,  $l$ , es el número aureo

$$\frac{d}{l} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$



**D/.** Demostrar que los triángulos  $ADB$  y  $ABM$  son semejantes y usar el teorema de Thales.



**Ejercicio 5.** Prueba que  $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \Phi/2$  y  $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = (\Phi - 1)/2$ , donde  $\Phi$  es el número aureo (Indicación: aprovechar el dibujo y los cálculos de la demostración anterior)

**Ejercicio 5.** Prueba que  $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \Phi/2$  y  $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = (\Phi - 1)/2$ , donde  $\Phi$  es el número aureo (Indicación: aprovechar el dibujo y los cálculos de la demostración anterior)

## Construcción de polígonos regulares

**Ejercicio 5.** Prueba que  $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \Phi/2$  y  $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = (\Phi - 1)/2$ , donde  $\Phi$  es el número aureo (Indicación: aprovechar el dibujo y los cálculos de la demostración anterior)

### Construcción de polígonos regulares

Una construcción clásica solo permite usar una regla sin marcar y un compás. Es fácil construir un triángulo equilátero y un cuadrado con regla y compás conocida la longitud de su lado.

**Ejercicio 5.** Prueba que  $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \Phi/2$  y  $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = (\Phi - 1)/2$ , donde  $\Phi$  es el número aureo (Indicación: aprovechar el dibujo y los cálculos de la demostración anterior)

### Construcción de polígonos regulares

Una construcción clásica solo permite usar una regla sin marcar y un compás. Es fácil construir un triángulo equilátero y un cuadrado con regla y compás conocida la longitud de su lado.

El exágono regular puede construirse con regla y compás porque su lado coincide con el radio de la circunferencia circunscrita.

**Ejercicio 5.** Prueba que  $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \Phi/2$  y  $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = (\Phi - 1)/2$ , donde  $\Phi$  es el número aureo (Indicación: aprovechar el dibujo y los cálculos de la demostración anterior)

### Construcción de polígonos regulares

Una construcción clásica solo permite usar una regla sin marcar y un compás. Es fácil construir un triángulo equilátero y un cuadrado con regla y compás conocida la longitud de su lado.

El exágono regular puede construirse con regla y compás porque su lado coincide con el radio de la circunferencia circunscrita.

El pentágono regular puede construirse con regla y compás porque puede construirse el número aureo.

**Ejercicio 5.** Prueba que  $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \Phi/2$  y  $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = (\Phi - 1)/2$ , donde  $\Phi$  es el número aureo (Indicación: aprovechar el dibujo y los cálculos de la demostración anterior)

## Construcción de polígonos regulares

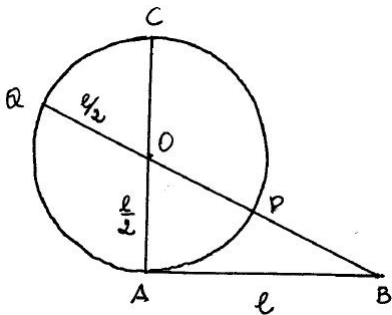
Una construcción clásica solo permite usar una regla sin marcar y un compás. Es fácil construir un triángulo equilátero y un cuadrado con regla y compás conocida la longitud de su lado.

El exágono regular puede construirse con regla y compás porque su lado coincide con el radio de la circunferencia circunscrita.

**El pentágono regular puede construirse con regla y compás porque puede construirse el número aureo.**

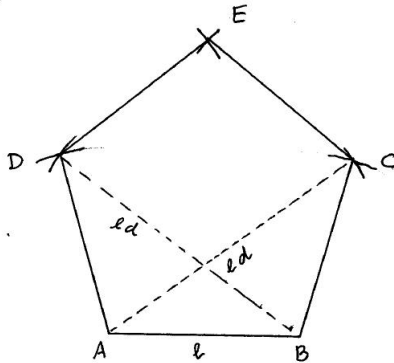
Sin embargo, el polígono regular de 7 lados no puede construirse con regla y compás. C. F. Gauss descubrió, cuando tenía 17 años, que el polígono regular de 17 lados puede construirse con regla y compás.

**Ejercicio 6.** Dado un segmento de longitud  $\ell$  demuestra que el segmento  $BQ$  de la figura es la longitud de la diagonal del pentágono regular de lado  $\ell$ , y que este segmento puede construirse con regla y compás.

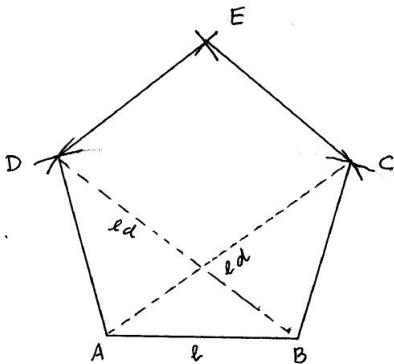




# Construcción del pentágono regular



## Construcción del pentágono regular

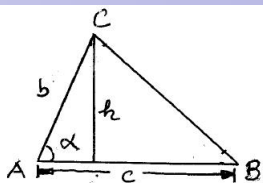


Dado el segmento  $AB$  de longitud  $l$  en el ejercicio 6 se ha construido la diagonal,  $d$ , del pentágono que tiene ese lado. Con centro en  $A$  y en  $B$  y radios  $l$  y  $d$  se trazan cuatro circunferencias obteniéndose los puntos de corte  $C$  y  $D$ . Con centro en  $C$  y en  $D$  se trazan circunferencias de radio  $l$ , que permiten obtener el punto de corte  $E$ , vértice superior del pentágono.

## 4.3.4. Áreas de polígonos.

El área de un triángulo es

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}cb \sin \alpha$$

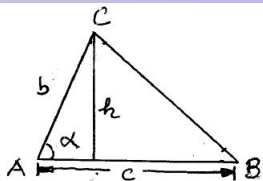


Si el triángulo es equilátero y llamamos  $\ell$  a la longitud de cada uno de sus lados, su área es  $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$ .

## 4.3.4. Áreas de polígonos.

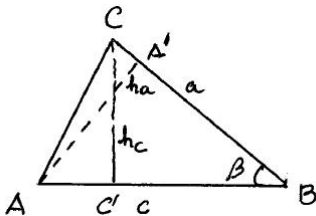
El área de un triángulo es

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}cb \sin \alpha$$



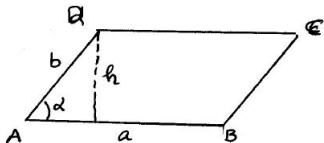
Si el triángulo es equilátero y llamamos  $\ell$  a la longitud de cada uno de sus lados, su área es  $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$ .

**Ejercicio 7.** Demostrar que el área de un triángulo es independiente de la base y la altura elegidas. (Indicación: Usar el teorema de Tales para probar que  $\frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}ah_a$  en el triángulo de la figura)



El área de un paralelogramo es

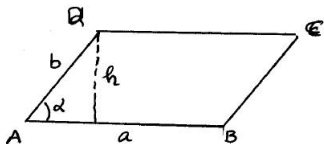
$$\text{Área}(ABCD) = ah = ab \sin \alpha$$



Si el paralelogramo es un cuadrado y llamamos  $\ell$  a la longitud de cada uno de sus lados, su área es  $\ell^2$ . El área de un cuadrilátero cualquiera se puede calcular por triangulación.

El área de un paralelogramo es

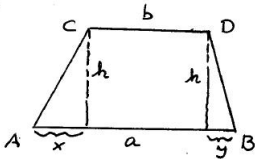
$$\text{Área}(ABCD) = ah = ab \sin \alpha$$



Si el paralelogramo es un cuadrado y llamamos  $l$  a la longitud de cada uno de sus lados, su área es  $l^2$ . El área de un cuadrilátero cualquiera se puede calcular por triangulación.

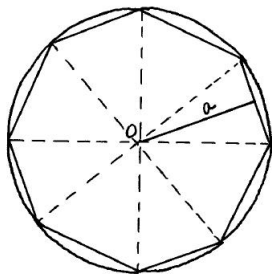
**Ejercicio 8.** Demostrar que el área de un trapecio cuyas longitudes de los lados paralelos son  $a$  y  $b$  y su altura  $h$  es

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{a+b}{2} h.$$



Si un polígono es regular, de  $n$  lados, lo más fácil es descomponerlo en triángulos con vértice común en el centro del polígono. Si  $\ell$  es la longitud del lado, demostrar que su área es:

$$\text{Área} = \frac{n\ell^2}{4 \tan(\pi/n)}.$$



**Ejercicio 9.** Demostrar que el área de un pentágono regular cuyo lado tiene longitud  $\ell$  es

$$\frac{5(1 + \sqrt{5})}{4\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \ell^2.$$



**Ejercicio 9.** Demostrar que el área de un pentágono regular cuyo lado tiene longitud  $\ell$  es

$$\frac{5(1 + \sqrt{5})}{4\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \ell^2.$$

**Ejercicio 10.** Demostrar que el área de un exágono regular cuyo lado tiene longitud  $\ell$  es

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \ell^2.$$

## FÓRMULA DE HERÓN

Si  $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$  es el semiperímetro de un triángulo cuyos lados miden  $a$ ,  $b$  y  $c$ , se tiene

$$\text{Área}(ABC) = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

