CMES.
Curso 2011-12

EJERCICIOS DEL TEMA 3.

3.4. Procesos de Markov. Forma de Jordan de matrices de orden 2.

1. (**Alquiler de coches.**) Una compañía de alquiler de coches tiene 3 sedes A, B y C. Se observa que de los clientes que alquilan el coche en A sólo el 80% lo devuelve de nuevo a A, mientras que un 10% lo devuelve en B y el otro 10% en C. De entre quienes alquilan el vehículo en B, 30% lo devolverá en A, 20% en B y 50% en C. Por último, de los que alquilan en C, 20% lo devuelve en A, 60% en B y 20% en C. ¿Qué proporción de vehículos quedará en cada sede con el paso del tiempo?

2. (**Una explotación forestal.**) En un bosque maderero los árboles están clasificados en tres tamaños: pequeños, medianos y grandes. Cada año un 50% de los árboles pequeños pasan a ser medianos y un 25% de los árboles medianos pasan a ser grandes. Cada año se corta el 20% de los árboles grandes para su venta, a la vez que se repuebla con el mismo número de árboles de tamaño pequeño.

   a) Hallar la matriz de transición de este sistema

   b) Si se comienza la explotación forestal con 1000 árboles pequeños, ¿cuál es la distribución de árboles al final del cuarto año?

   c) ¿Se estabiliza la proporción de árboles con el paso del tiempo? ¿Cómo?

3. (**Modelo competitivo.**) Dos especies animales compiten en un territorio. La presencia de una disminuye la tasa de crecimiento de la otra y viceversa. El sistema se rige por las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = 3x_{n-1} - y_{n-1} \\ y_n = -2x_{n-1} + 2y_{n-1} \end{array} \right\},$$

   donde los periodos se miden en años. Hallar x_n e y_n sabiendo que inicialmente $x_0 = 90, y_0 = 150$. ¿Desaparece alguna de las especies? ¿En cuánto tiempo?

4. (**Modelo depredador-presa.**) La presencia de un depredador afecta negativamente a la tasa de crecimiento de la presa. El sistema se rige por las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = 2x_{n-1} - y_{n-1} \\ y_n = 2x_{n-1} + 4y_{n-1} \end{array} \right\},$$

   donde los periodos se miden en años. Hallar x_n e y_n sabiendo que inicialmente $x_0 = 500, y_0 = 100$. ¿Cuánto tiempo tardará en desaparecer la presa?

5. Hallar la forma de Jordan real de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ indicando la matriz de paso P.

6. Hallar la forma de Jordan real de la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, indicando la matriz de paso P. Usar estos resultados para hallar la solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})x_{n-1} + \frac{\sqrt{3}}{2}y_{n-1} \\ y_n = -\sqrt{3}x_{n-1} + (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})y_{n-1} \end{array} \right\}.$$

   con las condiciones iniciales $x_0 = 10, y_0 = 5$.