ARITMÉTICA I

Adolfo Quirós

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR
EN MATEMÁTICAS
Curso 2011-2012

Demostrar que para todo número natural $n \geq 1$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Demostración por inducción.

El principio de inducción se basa en los **Axiomas de Peano**, que caracterizan el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.

Axiomas de Peano (relación = más...)

1. $0 \in \mathbb{N}$.
2. Existe una función $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un único $S(n) \in \mathbb{N}$, el **sucesor de n**.
3. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $S(n) \neq 0$
4. $S(m) = S(n) \implies m = n$. Es decir, S es inyectiva.
5. **El axioma de inducción** Si K es un conjunto tal que
    - $0 \in K$,
    - para todo $n \in \mathbb{N}$, si $n \in K \implies S(n) \in K$,

   entonces $\mathbb{N} \subset K$.

Por inducción podemos demostrar **fórmulas**:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\sum_{k}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

Desigualdades: Para todo entero $n > 4$ se tiene $2^n > n^2 + 1$.
Teoremas: Si A es un conjunto finito con $Card(A) = n$ entonces A tiene 2^n subconjuntos.
Cosas extrañas: Dado un conjunto C de caballos todos los caballos de C son del mismo color.

Y también

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA (EXISTENCIA)

Dado un entero $n > 1$ se puede escribir como

$$n = p_1 p_2 \dots p_r$$

donde $p_1, p_2, \dots . p_r$ son primos, no necesariamente distintos.

- ¿Y $n = 0$?
- ¿$n = 1$?
- ¿Qué es un primo? ¿Es 1 primo?
- ¿Y si $n \in \mathbb{Z}$ es quizás negativo?

Ejemplos: $n_1 = 1306800$; $\quad n_2 = 1327103$

$$n_1 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2$$

$$n_2 = 1151 \cdot 1153$$

No es sólo cuestión de tamaños, pero el tamaño importa.

- **¿Es fácil encontrar primos?**
- **¿Es fácil factorizar?**

Definición vs cálculo

- **¿Cómo se definen** $(m,n) := m.c.d.(m,n)$ **y** $[m,n] := m.c.m.(m,n)$**?**
- **¿Cómo se calculan** (m,n) : **y** $[m,n]$

Ejemplo 1:

$$m_1 = 1306800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2, \quad n_1 = 292500 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 13$$

Ejemplo 2:

$$m_2 = 1292573, \qquad n_2 = 1285667$$

¿Cómo calculo (m_2, n_2) si no puedo factorizar?

¡Usando el Algoritmo de Euclides!

¿Menos que enteros?

¿Más o menos que pares?

¿Más o menos que cuadrados?

¿Menos que racionales?

¿Menos que reales?