3. Álgebra Lineal // 3.4. Forma de Jordan de matrices de orden 2.

Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR EN MATEMÁTICAS
Curso 2011-2012

3.4.1. Forma de Jordan de matrices de orden 2 con autovalores reales

Ejercicio 1. Prueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no puede diagonalizarse.

3.4.1. Forma de Jordan de matrices de orden 2 con autovalores reales

Ejercicio 1. Prueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no puede diagonalizarse.

Forma de Jordan de matrices de orden 2

Sea A una matriz cuadrada de orden 2 con un autovalor doble $\lambda \in \mathbb{R}$ y solo un autovector linealmente independiente. Elegir $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ que no sea autovector de A y tomar $\vec{u} = (A - \lambda I)(\vec{v}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Entonces

$$A = PJP^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

.

Ejercicio 2. Hallar la forma de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

indicando la matriz de paso P.

Ejercicio 2. Hallar la forma de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

indicando la matriz de paso P.

Ejercicio 3. Prueba que $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$

Solución para un sistema de evolución

Si la forma de Jordan de una matriz A de orden 2 es $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, el sistema de evolución

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix},$$

tiene como solución

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (c_1\lambda^n + c_2 n\lambda^{n-1}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + c_2\lambda^n \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

donde $\vec{v} \neq \vec{0}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ no es autovector de A y $\vec{u} = (A - \lambda I)(\vec{v})$. Las constantes c_1 y c_2 se determinan con las condiciones iniciales.

Ejercicio 4. (**Sistema depredador-presa.**) En un bosque hay conejos y zorros. Los conejos y los zorros se reproducen, pero a su vez la población de conejos disminuye al ser comidos por los zorros y la de los zorros aumenta con el número de conejos. El número x_n de conejos e y_n de zorros al finalizar el año n depende de las existencias en el año $n-1$ según las fórmulas

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = 3x_{n-1} - y_{n-1} \\ y_n = x_{n-1} + y_{n-1} \end{array} \right\}.$$

Supongamos que inicialmente hay 500 conejos y 1000 zorros.

a) Describe la evolución de este sistema a lo largo del tiempo.
b) ¿Desaparece alguna de la dos especies? ¿En cuanto tiempo?

3.4.2. Forma de Jordan de matrices de orden 2 con autovalores complejos

Forma de Jordan real de matrices de orden 2 con autovalores complejos

Sea A una matriz real de orden 2 con un autovalores complejos $\lambda_1 = a + bi, \, , \lambda_2 = a - bi \, , (b \neq 0)$. Se tiene

$$A = PJP^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}^{-1},$$

donde $\vec{w} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ es un autovector del autovalor λ_1. La matriz $J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ se llama forma de Jordan real de la matriz A.

Ejercicio 5. Hallar la forma de Jordan real y la matriz de paso P para la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5. Hallar la forma de Jordan real y la matriz de paso P para la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Para calcular $J^n = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^n$ escribir

$$a + bi = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) = re^{i\alpha}\,.$$

Entonces,

$$J^n = \begin{pmatrix} r\cos\alpha & r\operatorname{sen}\alpha \\ -r\operatorname{sen}\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} r\cos n\alpha & r\operatorname{sen} n\alpha \\ -r\operatorname{sen} n\alpha & r\cos n\alpha \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5. Hallar la forma de Jordan real y la matriz de paso P para la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Para calcular $J^n = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^n$ escribir

$$a + bi = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) = re^{i\alpha}.$$

Entonces,

$$J^n = \begin{pmatrix} r\cos\alpha & r\operatorname{sen}\alpha \\ -r\operatorname{sen}\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} r\cos n\alpha & r\operatorname{sen} n\alpha \\ -r\operatorname{sen} n\alpha & r\cos n\alpha \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6. Calcular A^{20} para $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución para un sistema de evolución

Si la forma de Jordan de una matriz A de orden 2 es $J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, el sistema de evolución

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix},$$

tiene como solución

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (c_1 r^n \cos n\alpha + c_2 r^n \operatorname{sen} n\alpha) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$+(-c_1 r^n \operatorname{sen} n\alpha + c_2 r^n \cos n\alpha) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

donde $\vec{w} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ es un autovector del autovalor λ_1 . Las constantes c_1 y c_2 se determinan con las condiciones iniciales.

Ejercicio 7. Resolver

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix},$$

con las condiciones iniciales $x_0 = 5, y_0 = 1$.