3. Álgebra Lineal // 3.2. Geometría analítica en el plano y en el espacio.

Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR EN MATEMÁTICAS
Curso 2010-2011

3.2.1. Rectas en el plano y en el espacio

La recta que pasa por el punto $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ y tiene a $\vec{v} = (v_1, v_2)$ como vector director tiene por ecuación paramétrica $(x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2)$, $t \in \mathbb{R}$.

3.2.1. Rectas en el plano y en el espacio

La recta que pasa por el punto $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ y tiene a $\vec{v} = (v_1, v_2)$ como vector director tiene por ecuación paramétrica $(x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2)\ , t \in \mathbb{R}$.

Al eliminar t en las ecuaciones paramétricas de una recta en el plano se obtiene una expresión del tipo $ax + by + c = 0$ que se llama ecuacion cartesiana de la recta.

3.2.1. Rectas en el plano y en el espacio

La recta que pasa por el punto $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ y tiene a $\vec{v} = (v_1, v_2)$ como vector director tiene por ecuación paramétrica $(x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Al eliminar t en las ecuaciones paramétricas de una recta en el plano se obtiene una expresión del tipo $ax + by + c = 0$ que se llama ecuacion cartesiana de la recta.

Dos rectas en el plano pueden cortarse, ser paralelas o coincidentes.

3.2.1. Rectas en el plano y en el espacio

La recta que pasa por el punto $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ y tiene a $\vec{v} = (v_1, v_2)$ como vector director tiene por ecuación paramétrica $(x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Al eliminar t en las ecuaciones paramétricas de una recta en el plano se obtiene una expresión del tipo $ax + by + c = 0$ que se llama ecuacion cartesiana de la recta.

Dos rectas en el plano pueden cortarse, ser paralelas o coincidentes.

¿Cómo se distingue cada caso?

3.2.1. Rectas en el plano y en el espacio

La recta que pasa por el punto $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ y tiene a $\vec{v} = (v_1, v_2)$ como vector director tiene por ecuación paramétrica $(x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Al eliminar t en las ecuaciones paramétricas de una recta en el plano se obtiene una expresión del tipo $ax + by + c = 0$ que se llama ecuacion cartesiana de la recta.

Dos rectas en el plano pueden cortarse, ser paralelas o coincidentes.

¿Cómo se distingue cada caso?

Ejercicio 1. Describir las ecuaciones paramétricas y cartesianas de la recta que pasa por el punto $P = (2, 1)$ y tiene a $\vec{v} = (1, 5)$ como vector director.

Ejercicio 2. Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r_1 : 2x + y = 2 \qquad \text{y} \qquad r_2 : 3x - y = -7$$

Ejercicio 2. Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r_1 : 2x + y = 2 \qquad \text{y} \qquad r_2 : 3x - y = -7$$

Demuestra que $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ **es la ecuación de una recta en el plano que pasa por los puntos** $A = (a_1, a_2)$ **y** $B = (b_1, b_2)$.

Ejercicio 2. Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r_1 : 2x + y = 2 \qquad \text{y} \qquad r_2 : 3x - y = -7$$

Demuestra que $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ **es la ecuación de una recta en el plano que pasa por los puntos** $A = (a_1, a_2)$ **y** $B = (b_1, b_2)$.

La recta que pasa por el punto $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ y tiene a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ como vector director tiene por ecuación paramétrica $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t(v_1, v_2, v_3)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r_1 : 2x + y = 2 \qquad \text{y} \qquad r_2 : 3x - y = -7$$

Demuestra que $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ **es la ecuación de una recta en el plano que pasa por los puntos** $A = (a_1, a_2)$ **y** $B = (b_1, b_2)$.

La recta que pasa por el punto $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ y tiene a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ como vector director tiene por ecuación paramétrica $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t(v_1, v_2, v_3)$, $t \in \mathbb{R}$.

Al eliminar t en las ecuaciones paramétricas de una recta en el espacio se obtiene dos expresiones del tipo

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \,, \qquad a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

que son su ecuacion cartesiana.

Dos rectas en el espacio pueden cortarse, cruzarse, ser paralelas o coincidentes.

Dos rectas en el espacio pueden cortarse, cruzarse, ser paralelas o coincidentes.

¿Cómo se distingue cada caso?

Dos rectas en el espacio pueden cortarse, cruzarse, ser paralelas o coincidentes.

¿Cómo se distingue cada caso?

Ejercicio 3. Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r_1 : (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(-1, 1, 0)$$

$$r_2 : (x, y, z) = (0, 1, 2) + s(2, 0, 1)$$

Dos rectas en el espacio pueden cortarse, cruzarse, ser paralelas o coincidentes.

¿Cómo se distingue cada caso?

Ejercicio 3. Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r_1 : (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(-1, 1, 0)$$

$$r_2 : (x, y, z) = (0, 1, 2) + s(2, 0, 1)$$

Ejercicio 4. Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{r} x - 1 = 0 \\ 3y - z + 5 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad r_1 : \left\{ \begin{array}{r} x - y + z = 4 \\ 2x - z = 0 \end{array} \right\}.$$

3.2.2. Planos en tres dimensiones

El plano que pasa por el punto $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ y está generado por los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tiene por ecuación paramétrica
$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3)\ , t, s \in \mathbb{R}\,.$

El plano que pasa por el punto $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ y está generado por los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tiene por ecuación paramétrica
$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3)\ , t, s \in \mathbb{R}\,.$

Para eliminar t y s observar que para cada (x, y, z) fijos, el sistema $r_1 : \left\{ \begin{array}{c} x = p_1 + tu_1 + sv_1 \\ y = p_2 + tu_2 + sv_2 \\ z = p_3 + tu_3 + sv_3 \end{array} \right\}$ tiene solución única en las variables t, s.

3.2.2. Planos en tres dimensiones

El plano que pasa por el punto $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ y está generado por los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tiene por ecuación paramétrica
$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3)$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Para eliminar t y s observar que para cada (x, y, z) fijos, el sistema $r_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = p_1 + tu_1 + sv_1 \\ y = p_2 + tu_2 + sv_2 \\ z = p_3 + tu_3 + sv_3 \end{array} \right\}$ tiene solución única en las variables t, s. Esto es posible si y solo si

$$2 = r \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & x - p_1 \\ u_2 & v_2 & y - p_2 \\ u_3 & v_3 & z - p_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x \\ u_2 & v_2 & y \\ u_3 & v_3 & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & p_1 \\ u_2 & v_2 & p_2 \\ u_3 & v_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x \\ u_2 & v_2 & y \\ u_3 & v_3 & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & p_1 \\ u_2 & v_2 & p_2 \\ u_3 & v_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el primer determinante por la tercera columna se obtiene una expresión de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$ que es la ecuación cartesiana del plano.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x \\ u_2 & v_2 & y \\ u_3 & v_3 & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & p_1 \\ u_2 & v_2 & p_2 \\ u_3 & v_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el primer determinante por la tercera columna se obtiene una expresión de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$ que es la ecuación cartesiana del plano.

Dos planos en el espacio pueden cortarse en una recta, ser paralelos o coincidentes.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x \\ u_2 & v_2 & y \\ u_3 & v_3 & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & p_1 \\ u_2 & v_2 & p_2 \\ u_3 & v_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el primer determinante por la tercera columna se obtiene una expresión de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$ que es la ecuación cartesiana del plano.

Dos planos en el espacio pueden cortarse en una recta, ser paralelos o coincidentes.

¿Cómo se distingue cada caso?

Ejercicio 5. Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $P = (1, 1, 0)$ y tiene a $\vec{u} = (-1, 0, 2)$ y a $\vec{v} = (1, 3, 3)$ como vectores generadores.

Ejercicio 5. Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $P = (1, 1, 0)$ y tiene a $\vec{u} = (-1, 0, 2)$ y a $\vec{v} = (1, 3, 3)$ como vectores generadores.

Ejercicio 6. Hallar la posición relativa de los planos de ecuaciones $2x + 3y - z = 1$ y $-x - 2y + z = 0$.

Ejercicio 5. Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $P = (1, 1, 0)$ y tiene a $\vec{u} = (-1, 0, 2)$ y a $\vec{v} = (1, 3, 3)$ como vectores generadores.

Ejercicio 6. Hallar la posición relativa de los planos de ecuaciones $2x + 3y - z = 1$ y $-x - 2y + z = 0$.

Ejercicio 7. Hallar la ecuación del plano paralelo al de ecuación $x + y + z = 0$ que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$.

3.2.3. Producto escalar. Longitudes y ángulos.

PRODUCTO ESCALAR

Si $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ son dos vectores de $\mathbb{R}^n$, se define su producto escalar como $< \vec{x}, \vec{y} >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

3.2.3. Producto escalar. Longitudes y ángulos.

PRODUCTO ESCALAR

Si $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ son dos vectores de $\mathbb{R}^n$, se define su producto escalar como $< \vec{x}, \vec{y} >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

a) $< \vec{x}, \vec{x} > \geq 0$ y $< \vec{x}, \vec{x} >= 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$.

b) $< \vec{x}, \vec{y} >=< \vec{y}, \vec{x} >$ (Simétrica)

c) $< \lambda\vec{x}, \vec{y} >= \lambda < \vec{x}, \vec{y} >$, $\lambda \in \mathbb{R}$

d) b) $< \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} >=< \vec{x}, \vec{z} > + < \vec{y}, \vec{z} >$ (Distributiva)

3.2.3. Producto escalar. Longitudes y ángulos.

PRODUCTO ESCALAR

Si $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ son dos vectores de $\mathbb{R}^n$, se define su producto escalar como $< \vec{x}, \vec{y} >= \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

a) $< \vec{x}, \vec{x} >\geq 0$ y $< \vec{x}, \vec{x} >= 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$.

b) $< \vec{x}, \vec{y} >=< \vec{y}, \vec{x} >$ (Simétrica)

c) $< \lambda\vec{x}, \vec{y} >= \lambda < \vec{x}, \vec{y} >$, $\lambda \in \mathbb{R}$

d) b) $< \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} >=< \vec{x}, \vec{z} > + < \vec{y}, \vec{z} >$ (Distributiva)

LONGITUD O NORMA DE UN VECTOR

La longitud o norma de un vector $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es $\|\vec{x}\| = \sqrt{< \vec{x}, \vec{x} >} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

3.2.3. Producto escalar. Longitudes y ángulos.

PRODUCTO ESCALAR

Si $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ son dos vectores de $\mathbb{R}^n$, se define su producto escalar como $< \vec{x}, \vec{y} >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

a) $< \vec{x}, \vec{x} > \geq 0$ y $< \vec{x}, \vec{x} >= 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$.

b) $< \vec{x}, \vec{y} >=< \vec{y}, \vec{x} >$ (Simétrica)

c) $< \lambda\vec{x}, \vec{y} >= \lambda < \vec{x}, \vec{y} >$, $\lambda \in \mathbb{R}$

d) b) $< \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} >=< \vec{x}, \vec{z} > + < \vec{y}, \vec{z} >$ (Distributiva)

LONGITUD O NORMA DE UN VECTOR

La longitud o norma de un vector $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es $\|\vec{x}\| = \sqrt{< \vec{x}, \vec{x} >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\quad | < \vec{x}, \vec{y} > | \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$.

Coseno

El coseno del ángulo que forman dos vectores no nulos $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ es $\cos\alpha = \cos\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{<\vec{x}, \vec{y}>}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$.

COSENO

El coseno del ángulo que forman dos vectores no nulos $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ es $\cos\alpha = \cos\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{<\vec{x},\vec{y}>}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$.

NOTA: Observar que la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica $-1 \leq \cos\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) \leq 1$.

Coseno

El coseno del ángulo que forman dos vectores no nulos $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ es $\cos\alpha = \cos\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{<\vec{x},\vec{y}>}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$.

NOTA: Observar que la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica $-1 \leq \cos\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) \leq 1$.

Ortogonalidad o perpendicularidad

Dos vectores no nulos $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales o perpendiculares si $< \vec{x}, \vec{y} >= 0$.

Coseno

El coseno del ángulo que forman dos vectores no nulos $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ es $\cos \alpha = \cos \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{<\vec{x}, \vec{y}>}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$.

NOTA: Observar que la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica $-1 \leq \cos \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) \leq 1$.

Ortogonalidad o perpendicularidad

Dos vectores no nulos $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales o perpendiculares si $< \vec{x}, \vec{y} >= 0$.

Ejercicio 8. Demostrar que si k vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$ son ortogonales entre sí, también son linealmente independientes.

Coseno

El coseno del ángulo que forman dos vectores no nulos $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ es $\cos\alpha = \cos\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{<\vec{x},\vec{y}>}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$.

NOTA: Observar que la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica $-1 \leq \cos\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) \leq 1$.

Ortogonalidad o perpendicularidad

Dos vectores no nulos $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales o perpendiculares si $< \vec{x}, \vec{y} >= 0$.

Ejercicio 8. Demostrar que si k vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$ son ortogonales entre sí, también son linealmente independientes.

Desigualdad triangular

Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\qquad \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

NOTA: Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ son perpendiculares entre sí,

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 .$$

NOTA: Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ son perpendiculares entre sí,

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 .$$

El concepto de ortogonalidad permite calcular ecuaciones de rectas y planos

NOTA: Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ son perpendiculares entre sí,

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 .$$

El concepto de ortogonalidad permite
calcular ecuaciones de rectas y planos

Ejercicio 9. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (1, -2)$ y tiene a $\vec{u} = (1, 3)$ como vector director.

NOTA: Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ son perpendiculares entre sí,

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 .$$

El concepto de ortogonalidad permite
calcular ecuaciones de rectas y planos

Ejercicio 9. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (1, -2)$ y tiene a $\vec{u} = (1, 3)$ como vector director.

Ejercicio 10. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P = (1, 3, -2)$ y es perpendicular al vector $\vec{u} = (2, -1, 4)$.

NOTA: Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ son perpendiculares entre sí,

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \,.$$

El concepto de ortogonalidad permite
calcular ecuaciones de rectas y planos

Ejercicio 9. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (1, -2)$ y tiene a $\vec{u} = (1, 3)$ como vector director.

Ejercicio 10. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P = (1, 3, -2)$ y es perpendicular al vector $\vec{u} = (2, -1, 4)$.

El vector $\vec{u} = (a, b, c)$ es perpendicular al plano de ecuación $ax + by + cz + d = 0$ en $\mathbb{R}^3$.

3.2.4. Proyecciones y distancias.

PROYECCIÓN DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA EN $\mathbb{R}^n$.

La proyección de un punto Q sobre una recta $r : P + t\vec{v}\,, t \in \mathbb{R}\,,$ en $\mathbb{R}^n$, es un punto $Q' \in r$ tal que $\overrightarrow{QQ'} \perp \vec{v}$. Entonces, $Q' = P + t'\vec{v}$ y además:

$$0 =< \overrightarrow{QQ'}, \vec{v} >=< \overrightarrow{QP} + t'\vec{v}, \vec{v} >=< \overrightarrow{QP}, \vec{v} > +t' < \vec{v}, \vec{v} > \ .$$

Despejando t' obtenemos, $Q' = P - \frac{<\overrightarrow{QP}, \vec{v}>}{||\vec{v}||^2}\vec{v}\,.$

3.2.4. Proyecciones y distancias.

Proyección de un punto sobre una recta en $\mathbb{R}^n$.

La proyección de un punto Q sobre una recta $r : P + t\vec{v}\,,\, t \in \mathbb{R}\,,$ en $\mathbb{R}^n$, es un punto $Q' \in r$ tal que $\overrightarrow{QQ'} \perp \vec{v}$. Entonces, $Q' = P + t'\vec{v}$ y además:

$$0 =< \overrightarrow{QQ'}, \vec{v} >=< \overrightarrow{QP} + t'\vec{v}, \vec{v} >=< \overrightarrow{QP}, \vec{v} > +t' < \vec{v}, \vec{v} > \ .$$

Despejando t' obtenemos, $Q' = P - \frac{<\overrightarrow{QP},\vec{v}>}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$.

Distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^n$.

Una vez calculada la proyección del punto Q sbre la recta $\mathbb{R}^n$, la distancia de Q a la recta r es $d(Q, r) = \|QQ'\|$.

3.2.4. Proyecciones y distancias.

PROYECCIÓN DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA EN $\mathbb{R}^n$.

La proyección de un punto Q sobre una recta $r : P + t\vec{v}\,,\, t \in \mathbb{R}$, en $\mathbb{R}^n$, es un punto $Q' \in r$ tal que $\overrightarrow{QQ'} \perp \vec{v}$. Entonces, $Q' = P + t'\vec{v}$ y además:

$$0 =< \overrightarrow{QQ'}, \vec{v} >=< \overrightarrow{QP} + t'\vec{v}, \vec{v} >=< \overrightarrow{QP}, \vec{v} > +t' < \vec{v}, \vec{v} > \ .$$

Despejando t' obtenemos, $Q' = P - \frac{<\overrightarrow{QP}, \vec{v}>}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA EN $\mathbb{R}^n$.

Una vez calculada la proyección del punto Q sbre la recta $\mathbb{R}^n$, la distancia de Q a la recta r es $d(Q, r) = \|QQ'\|$.

Ejercicio 11. Hallar la distancia del punto $Q = (1, 2, -1)$ a la recta r de ecuación $(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(-1, 0, 2)\,,\, t \in \mathbb{R}$.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA EN $\mathbb{R}^2$.

Cuando el punto $Q = (q_1, q_2)$ y la recta r de ecuación $ax + by + c = 0$ están en $\mathbb{R}^2$ la distancia de Q a r puede calcularse con la fórmula

$$d(Q, r) = \frac{|aq_1 + bq_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^2$.

Cuando el punto $Q = (q_1, q_2)$ y la recta r de ecuación $ax + by + c = 0$ están en $\mathbb{R}^2$ la distancia de Q a r puede calcularse con la fórmula

$$d(Q, r) = \frac{|aq_1 + bq_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Distancia de un punto a un plano en $\mathbb{R}^3$.

Cuando el punto $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y el plano π de ecuación $ax + by + cz + d = 0$ están en $\mathbb{R}^3$ la distancia de Q a r puede calcularse con la fórmula

$$d(Q, r) = \frac{|aq_1 + bq_2 + cq_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

3.2.5. Algunas áreas y volúmenes.

Área de un paralelogramo en $\mathbb{R}^n$

El área del paralelogramo generado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en $\mathbb{R}^n$ se puede calcular con la fórmula

$$\text{Área} = \sqrt{\begin{vmatrix} <\vec{a},\vec{a}> & <\vec{a},\vec{b}> \\ <\vec{a},\vec{b}> & <\vec{b},\vec{b}> \end{vmatrix}} = \sqrt{\|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2 - (<\vec{a}\,,\vec{b}>)^2}$$

3.2.5. Algunas áreas y volúmenes.

ÁREA DE UN PARALELOGRAMO EN $\mathbb{R}^n$

El área del paralelogramo generado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en $\mathbb{R}^n$ se puede calcular con la fórmula

$$\text{Área} = \sqrt{\begin{vmatrix} <\vec{a},\vec{a}> & <\vec{a},\vec{b}> \\ <\vec{a},\vec{b}> & <\vec{b},\vec{b}> \end{vmatrix}} = \sqrt{\|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2 - (<\vec{a}\,,\vec{b}>)^2}$$

Ejercicio 12. Hallar el área del triángulo que tiene como vértices los puntos de intersección del plano de ecuación $2x + y + 3z = 6$ con los ejes coordenados.

La fórmula para el área de un paralegramo se simplifica cuando los vectores que lo generan están en $\mathbb{R}^2$.

ÁREA DE UN PARALELOGRAMO EN $\mathbb{R}^2$

El área del paralelogramo generado por los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$ en $\mathbb{R}^2$ se puede calcular con la fórmula

$$\text{Área} = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| .$$

La fórmula para el área de un paralegramo se simplifica cuando los vectores que lo generan están en $\mathbb{R}^2$.

Área de un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$

El área del paralelogramo generado por los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$ en $\mathbb{R}^2$ se puede calcular con la fórmula

$$\text{Área} = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| .$$

Para simplificar la fórmula del área de un paralelogramo en $\mathbb{R}^3$ necesitamos el producto vectorial.

Producto vectorial de dos vectores en $\mathbb{R}^2$

El producto vectorial de los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ en $\mathbb{R}^3$ es otro vector cuyas coordenadas son

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) .$$

Prueba que el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ es un vector perpendicular tanto a $\vec{a}$ como a $\vec{b}$.

ÁREA DE UN PARALELOGRAMO EN $\mathbb{R}^3$

El área del paralelogramo generado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en $\mathbb{R}^3$ es

$$\text{Área } = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \, .$$

Prueba que el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ es un vector perpendicular tanto a $\vec{a}$ como a $\vec{b}$.

ÁREA DE UN PARALELOGRAMO EN $\mathbb{R}^3$

El área del paralelogramo generado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en $\mathbb{R}^3$ es

$$\text{Área } = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \,.$$

D/ Comprobar, con un cálculo sencillo, que

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \, \|\vec{b}\|^2 - (< \vec{a}, \vec{b} >)^2 \,. \qquad \blacksquare$$

Prueba que el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ es un vector perpendicular tanto a $\vec{a}$ como a $\vec{b}$.

ÁREA DE UN PARALELOGRAMO EN $\mathbb{R}^3$

El área del paralelogramo generado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en $\mathbb{R}^3$ es

$$\text{Área } = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \,.$$

D/ Comprobar, con un cálculo sencillo, que

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \, \|\vec{b}\|^2 - (< \vec{a}, \vec{b} >)^2 \,. \qquad \blacksquare$$

Ejercicio 13. Comprueba que esta fórmula produce el mismo resultado que la usada en el ejercicio 12.

Volumen de un paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$

El volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (a_1, b_2, b_3)$ y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ en $\mathbb{R}^3$ puede calcularse con la fórmula

$$\text{Volumen} = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \right| .$$

Volumen de un paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$

El volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (a_1, b_2, b_3)$ y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ en $\mathbb{R}^3$ puede calcularse con la fórmula

$$\text{Volumen} = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \right| .$$

Ejercicio 14. Hallar la distancia entre las rectas de ecuaciones

$$r_1 : (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(2, 0, 1)$$

$$r_2 : (x, y, z) = (0, 1, 1) + s(1, 3, -1)$$