

*II.2 Compacidad. Compactos de  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^n$ . Compacidad y completitud en espacios métricos.*

1. Estudia si los siguientes conjuntos son compactos en los espacios que se indican.
  - (i)  $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}$ ;
  - (ii)  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ;
  - (iii)  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  con la topología del límite inferior  $\mathcal{T}_{\lfloor}$  y
  - (iv)  $[0, 1] \times \{3\} \subset \mathbb{R}^2$  con la topología del orden lexicográfico.
2. Si  $A \subset X$  es un conjunto finito de puntos, ¿es compacto cualquiera que sea la topología en  $X$ ?
3. Si un espacio es compacto con cierta topología, ¿lo es necesariamente con una menos fina?, ¿y con una más fina?
4. Sea  $A \subset X$  y supongamos que la topología heredada por  $A$  es la discreta. Dar una condición necesaria y suficiente sencilla para la compacidad de  $A$ .
5. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
  - (i) La unión finita de subconjuntos compactos de un espacio es un subconjunto compacto.
  - (ii) La unión de una familia cualquiera de compactos de un espacio es un subconjunto compacto.
  - (iii) La intersección de una familia cualquiera de compactos es un subconjunto compacto.
 (Indicación: considera en  $[0, 1]$  la topología cuya base es  $\mathcal{B} = \{(a, b) : 0 < a < b < 1\} \cup \{(0, 1]\} \cup \{[0, 1)\}$ .)
  - (iv) La intersección de una familia de compactos de un espacio de Hausdorff es un subconjunto compacto.
6. Prueba que si  $X$  es un espacio compacto y  $A \subset X$  entonces  $\bar{A}$  es compacto. Demuestra también que  $\mathcal{B} = \{\{0, n\} : n \in \mathbb{Z}\}$  es base para una topología sobre  $\mathbb{Z}$  en la que  $A = \{0\}$  es compacto pero  $\bar{A}$  no lo es. ¿Contradice esto lo anterior?
7. Demostrar que si  $f : X \rightarrow Y$  es continua,  $Y$  es Hausdorff y  $X$  es compacto, entonces  $f$  es cerrada.
8. Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto. Prueba que la función distancia está acotada.
9. Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $K \subset X$  un conjunto compacto. Demostrar que la función
 
$$d(x, K) = \inf \{d(x, y) : y \in K\}$$
 es continua y que para cada  $x \in X$  existe  $y \in K$  tal que  $d(x, K) = d(x, y)$ .
10. Sean  $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ ,  $X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Demostrar que  $X_1$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  y que  $X_1$  y  $X_2$  no son homeomorfos.
11. Demostrar que  $\mathbb{R}^2$  y  $S^2$  no son homeomorfos.
12. Sea  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2, x, y \in [-1, 1]\}$ , con la topología usual. ¿Existe alguna función continua y sobreyectiva de  $X$  en  $\mathbb{R}$ ?
13. Demostrar que si  $Y$  es compacto entonces  $p_1 : X \times Y \rightarrow X$  es cerrada. (Indicación: Si  $A$  es cerrado y  $x \notin p_1(A)$ , hallamos un “tubo”  $T = U_x \times Y$  tal que  $T \cap A = \emptyset$ .) Dar un ejemplo de un conjunto no compacto en  $\mathbb{R}^2$  cuyas proyecciones sean compactas.
14. Sea  $X$  un espacio topológico e  $Y$  un espacio de Hausdorff compacto. Probar que  $f : X \rightarrow Y$  es continua si y sólo si la gráfica de  $f$ ,  $\Gamma_f$ , es cerrada en  $X \times Y$ . Si  $X$  es también un espacio de Hausdorff compacto, entonces  $f$  es continua si y sólo si  $\Gamma_f$  es compacta. (Indicación: La clave de la demostración está en probar que  $f^{-1}(C) = p_1((X \times C) \cap \Gamma_f)$  para todo  $C$  cerrado de  $Y$  y luego basta usar el ejercicio anterior.)