Universidad Autónoma de Madrid Curso 2010-11

TOPOLOGÍA Hoja de ejercicios 6

II.1 Conexión. Conexión por caminos. Conexos de $\mathbb{R}$.

1. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio conexo. Sea $\mathcal{T}'$ otra topología sobre X. Si $\mathcal{T}'$ es menos fina que $\mathcal{T}$, ¿es $(X, \mathcal{T}')$ conexo?, ¿y si $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$?

2. ¿Existe algún subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ tal que ni A ni su complementario sean conexos?

3. Sea A es un subconjunto conexo de un espacio topológico. ¿Son $Int\, A$ o $Fr\, A$ conexos?

4. Demuestra que si A es un subconjunto conexo de un espacio topológico X y D es un subconjunto de X tal que $A \subset D \subset \overline{A}$, entonces D es conexo.

5. Estudia si $X = [0,1] \times [0,1]$ es conexo con: (i) la topología del orden lexicográfico en X y (ii) la topología heredadad de $\mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico.

6. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos conexos de un espacio topológico tales que $A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset$ para todo $1 \leq k < n$. Prueba que $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ es conexo. Trata de generalizar el resultado para una colección numerable de conexos.

7. Sean A y D dos conjuntos cerrados no vacíos de un espacio topológico X. Demuestra que si $A \cup D$ y $A \cap D$ son conexos entonces A y D también lo son. ¿Qué pasa si A ó D no son cerrados?

8. Demuestra que: $X \times Y$ es conexo si y solamente si X e Y son conexos.

9. Demuestra que si A es numerable entonces $\mathbb{R}^2 \setminus A$ es conexo por caminos.
(Indicación: El conjunto de rectas que pasan por un punto no es numerable.)

10. Prueba que si $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo entonces, para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in X$, $X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $Y \setminus \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ también son homeomorfos. Aplica lo anterior para demostrar que los subconjuntos de $\mathbb{R}$: $(1,2)$, $[1,2]$ y $[1,2)$ no son homeomorfos.

11. Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y sobreyectiva de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y que tiene n componentes conexas. Prueba que X tiene como mínimo n componentes conexas.

12. Demuestra que $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

13. Sean $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x+1)^2 + y^2 = 1\}$ e $Y = \mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$. ¿Existe alguna función continua y sobreyectiva de X en Y?, ¿y si pedimos además que sea biyectiva?

14. ¿Son $\mathbb{R}^1$ y $\mathbb{R}^2$ homeomorfos?

15. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) Si X es conexo por caminos y $f\colon X \to Y$ es una función continua y sobreyectiva entonces Y también es conexo por caminos.

(ii) Si A es un subconjunto conexo por caminos de un espacio topológico X y $A \subset D \subset \overline{A}$ entonces D es conexo por caminos.

(iii) Si $\mathcal{C} = \{C_i \colon i \in I\}$ es una colección de subconjuntos conexos por caminos de un espacio topológico X tal que existe $C_0 \in \mathcal{C}$ que interseca a cada elemento de $\mathcal{C}$, entonces $\bigcup_{i \in I} C_i$ es conexo por caminos.

16. Demuestra que todo subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ con más de un punto es no numerable.