I.3 Interior, adherencia, frontera y derivado.

1. Se considera el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$A = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}, 3) \cup \left\{ \frac{3n+10}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}.$$

Hallar $Int\, A$, $\overline{A}$ y A' en las siguientes topologías sobre $\mathbb{R}$:
(1) La usual.
(2) La cofinita.
(3) $\mathcal{T}_{[\,)}$ (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$).
(4) La que tiene como base $\mathcal{B} = \{[a,b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$.
(5) $\mathcal{T}_{\leftarrow}$ (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$).

2. Sea X un espacio topológico y $A, D \subset X$. Demuestra lo siguiente:
(i) $Fr\, A = \overline{A} \setminus Int\, A$.
(ii) $Fr\, A = \emptyset$ si y sólo si A es simultáneamente abierto y cerrado.
(iii) Si $\overline{A} \cap \overline{D} = \emptyset$ entonces $Fr(A \cup D) = Fr(A) \cup Fr(D)$.
(iv) Si A es abierto entonces $A \cap \overline{D} \subset \overline{A \cap D}$. ¿Se satisface la inclusión si A no es abierto?
(v) Si $A \cup D = X$ entonces $\overline{A} \cup Int\, D = Int\, A \cup \overline{D} = X$.
(vi) $Int\, A \cup Int\, D \subset Int(A \cup D)$.
(vii) La inclusión en el apartado anterior puede ser estricta.
(Indicación: encuentra $A, D \subset \mathbb{R}$ tales que $Int(A) \cup Int(D) \neq Int(A \cup D)$.)
(viii) Si $Fr\, A = D$ y $Fr\, D = A$ entonces $A = D$.

3. Encuentra dos subconjuntos A, D abiertos de $\mathbb{R}$ tal que los cuatro subconjuntos $A \cap \overline{D}$, $\overline{A} \cap D$, $\overline{A} \cap \overline{D}$ y $\overline{A \cap D}$ sean distintos.

4. Prueba que si en un espacio topológico X, un conjunto A y su complementario son densos (esto es, $\overline{A} = \overline{X - A} = X$), entonces $Int\, A = Int(X - A) = \emptyset$. ¿Es cierto el recíproco?

5. Halla un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que con la topología usual de $\mathbb{R}$ se tenga

$$Fr(A) = [1,2] \cup \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

6. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. (i) Para cada $A \subset X$ se tiene que $Int(FrA) = \emptyset$.
(ii) Si $A \neq \emptyset$ es cerrado y $IntA = \emptyset$, existe D tal que $A = Fr\, D$.
(iii) Si $Int(A) \neq \emptyset$ entonces $Int(\overline{A}) \neq \emptyset$.
(iv) Para cada $A \subset X$, $\overline{A} = \overline{Int\, A}$.
(v) Si $A \cap Fr(A) = \emptyset$ entonces A es abierto.
(vi) Para cada $A \subset X$, el conjunto A' es cerrado.
(vii) Si $x \notin A'$ entonces $x \notin (\overline{A})'$.

7. Sea X un espacio topológico. Sea $\{A_i \colon i \in I\}$ una familia de subconjuntos de X.
(i) Demuestra que

$$\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}.$$

(ii) Demuestra que si I es finito entonces $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$.
(iii) Halla un contraejemplo que muestre que en general no es cierto que $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \subset \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$.
(iv) Encuentra un fallo en la siguiente falsa demostración de la inclusión citada en (iii):
Si $x \in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$ entonces, para todo entorno U de x, $U \cap (\bigcup_{i\in I} A_i) \neq \emptyset$. Por tanto, $U \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ para algún $i_0 \in I$ y se tiene $x \in \overline{A_{i_0}}$ y $x \in \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$.