

1.1 Definición de topología. Ejemplos de topologías.

1. Sean X un conjunto infinito y \mathcal{T} una topología sobre X en la que todos los subconjuntos infinitos son abiertos. Demuestra que \mathcal{T} es la topología discreta de X .

2. Sea X un conjunto con más de dos elementos.

(i) Define dos topologías $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ sobre X de modo que $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ no sea una topología.

(ii) Sea $\mathcal{T}_j, j \in J$ una familia de topologías sobre X . Prueba que $\bigcap_{j \in J} \mathcal{T}_j$ es también una topología sobre X .

3. En el plano \mathbb{R}^2 se considera la familia \mathcal{T} de todos los subconjuntos U tales que para cada (a, b) de U existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$((a - \varepsilon, a + \varepsilon) \times \{b\}) \cup (\{a\} \times (b - \varepsilon, b + \varepsilon)) \subset U.$$

Estudia si \mathcal{T} es una topología en \mathbb{R}^2 .

4. Sean X un conjunto y a un elemento de X . Se considera la familia \mathcal{T}_a de los subconjuntos U de X tales que o bien U es vacío, o bien $a \in U$. Estudia si \mathcal{T}_a es una topología en X .

5. Sea (X, d) es un espacio métrico. Para cualesquiera x, y, x' e y' elementos de X , prueba que

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y').$$

Deduce de ello que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$ cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y)$.

1.2 Bases y entornos.

6. Se consideran las siguientes familias de subconjuntos de \mathbb{R} .

$$\mathcal{B}_{\leftarrow} = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_{\rightarrow} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}.$$

(i) Demuestra que cada familia es una base de una topología sobre \mathbb{R} ;

(ii) compara estas topologías, y

(iii) demuestra que la topología generada por $\mathcal{B}_{\leftarrow} \cup \mathcal{B}_{\rightarrow}$ es la usual.

7. Prueba que si \mathcal{B} es una base para una topología sobre X , entonces la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ generada por \mathcal{B} es igual a la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a \mathcal{B} .

8. Sea $\mathcal{T}_j, j \in J$ una familia de topologías sobre X . Demuestra que existe una topología que contiene a todas las \mathcal{T}_j , para $j \in J$ y además es la menos fina de todas las que verifican esta propiedad.

9. Para cada punto (x, y) de \mathbb{R}^2 y cada $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$ se considera el siguiente conjunto $B((x, y); r)$: el cuadrado con lados paralelos a los ejes, centrado en (x, y) y de lado $2r$, del que se ha excluido los lados y los puntos de las diagonales que no sean el punto (x, y) . Haz un dibujo que te ayude a demostrar que

$$\mathcal{B} = \{B((x, y); r) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$$

es una base para una topología en \mathbb{R}^2 .