UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID – CURSO 2010-11

TOPOLOGÍA. Parcial 3 (V, 13-05-2011)

APELLIDOS .... **NOMBRE** ....

DNI: .... **GRUPO.** .... **FIRMA:** ....

---

1. a) (**1 punto**) Escribe de forma precisa las definiciones de subconjunto conexo y subconjunto conexo por caminos de un espacio topológico.

b) (**1 punto**) Dibuja el conjunto $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = x/n, n \in \mathbb{N}\}$. Demuestra que A es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$. (Debes enunciar cualquier resultado que utileces en tu demostración)

---

2. a) (**1 punto**) Estudia si los siguientes conjuntos son compactos en el espacio topológico que se indica:

(i) $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{\rightarrow}$

(ii) El conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ del apartado b) del ejercicio 1 con la topología inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

b)(**1 punto**) Considera $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico compacto, $(Y, \mathcal{T}^*)$ un espacio topológico de Hausdorff y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua e inyectiva.

(i) Demuestra que f es un homeomorfismo

(ii) Usa el resultado del apartado anterior para probar que si $(X, \mathcal{T})$ es compacto y $(X, \mathcal{T}^*)$ es Haussdorff con $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$, entonces $(X, \mathcal{T})$ y $(X, \mathcal{T}^*)$ son homeomorfos.

---

3. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) (**0,5 de punto**) $[0, 1]$ es homeomorfo a $(4, 6)$ con la topología inducida por la topología usual de $\mathbb{R}$.

b) (**0,5 de punto**) Si X es conexo por caminos y $f : X \longrightarrow Y$ es continua y suprayectiva, entonces Y es también conexo por caminos.

c) (**0,5 de punto**) La unión de una familia cualquiera de compactos de un espacio topológico es un subconjunto compacto.

d) (**0,5 de punto**) Si $(X, \mathcal{T})$ satisface 2AN y $\mathcal{T}'$ es una topología en X con $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, entonces $(X, \mathcal{T}')$ satisface 2AN.

Duración: 1 hora y media