UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID – CURSO 2010-11
TOPOLOGÍA. Parcial 2 (V, 01-04-2011)

APELLIDOS .... **NOMBRE** ....

DNI: ....**GRUPO**..................... **FIRMA:** ....

1.
a) (**0,4 de punto**) Escribe de forma precisa las definiciones de aplicación continua, aplicación abierta y aplicación cerrada entre espacios topológicos.
b) (**0'8 de punto**) Sean $X = \mathbb{R}$ e $Y = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{usu})$. Define la aplicación

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

Demuestra que f es siempre cerrada y nunca es abierta cualquiera que sea la topología que se ponga en X.
c) (**0'8 de punto**) Estudia la continuidad de la aplicación f del apartado anterior cuando en $X = \mathbb{R}$ se pone la topología usual $\mathcal{T}_{usu}$ y cuando en $X = \mathbb{R}$ se pone la topología del límite inferior $\mathcal{T}_{[\ )}$.

---

2. En $X = \mathbb{R}^2$ con la topología usual definimos la relación de equivalencia

$$(x_1, y_1) \equiv (x_2, y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2 .$$

a) (**1 punto**) Prueba que el espacio topológico cociente $X^* = X/\equiv$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{usu})$.
b) (**0,5 de punto**) Prueba que si $(X, \mathcal{T})$ es homeomorfo a $(Y, \mathcal{T}')$ y $(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff, entonces $(Y, \mathcal{T}')$ es también Hausdorff.
c) (**0,5 de punto**) ¿Puede ser el espacio topológico cociente X^* del apartado a) homeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$?

---

3. Sea (X, d) un espacio métrico.
a) (**1 punto**) Prueba que si $x, y, z \in X$ se tiene que

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z) .$$

b) (**1 punto**) Prueba que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones en X tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in X$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = b \in X$ ambos en $(X, \mathcal{T}_d)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(a, b) \quad \text{en} \quad (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{usu}) .$$

Duración: 1 hora y media