TOPOLOGÍA / SEPTIEMBRE 2011

1. (a) FALSO. Si $X=\mathbb{R}$, $A=[0,1]$ y consideramos la topología usual, $X \setminus A = (-\infty,0)\cup(1,\infty)$ no es cerrado.

(b) FALSO. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{us})$ el conjunto $A=(0,1)$ es abierto, pero no es abierto con $\mathcal{T}_{\to}$ porque dado $x\in(0,1)$ los abiertos de $\mathcal{T}_{\to}$ que contienen a x deben ser de la forma (a,∞) con $a<x$ y $(a,\infty)\not\subset(0,1)$

(c) VERDADERO. Si $U\in\mathcal{T}_{cof}$, $U=\mathbb{R}\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$ con $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}$. Como $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{us})$ es T_1, los puntos son cerrados. Por tanto $\{x_1,\dots,x_n\}=\bigcup_{j=1}^{n}\{x_j\}$ es cerrado en $\mathcal{T}_{us}$ y $U=\mathbb{R}\setminus\{x_1,\dots,x_n\}\in\mathcal{T}_{us}$.

(d) FALSO. $0\in A'$ ya que si U es cualquier entorno abierto de 0 en $\mathcal{T}_{us}$, $\exists\, n\in\mathbb{N}$ t.q. $\frac{(-1)^n}{n}\in U \Rightarrow (U\setminus\{0\})\cap A\neq\emptyset$.

———— x ————

2. (a) Sea $x\in\bar{A}$; para todo $U\in E_{ab}(x)$, $U\cap A\neq\emptyset$
$\Rightarrow U\cap B\supset U\cap A\neq\emptyset \Rightarrow U\cap B\neq\emptyset \Rightarrow x\in\bar{B}$

(b) $\supset$) Sea $x\in\bar{A}\cup\bar{B}\Rightarrow x\in\bar{A}$ ó $x\in\bar{B}$

Si $x\in\bar{A}$, como $A\subset A\cup B$ por el apartado (a),
$\therefore \bar{A}\subset\overline{A\cup B}\Rightarrow x\in\overline{A\cup B}$

Si $x\in\bar{B}$, como $B\subset A\cup B$ por el apartado (a)
$\bar{B}\subset\overline{A\cup B}\Rightarrow x\in\overline{A\cup B}$

$\subset$) Como $A\subset\bar{A}$ y $B\subset\bar{B}$, $A\cup B\subset\bar{A}\cup\bar{B}$. Por el apartado (a), $\overline{A\cup B}\subset\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}$. Ahora bien, la unión finita de cerrados es un cerrado, luego $\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}=\bar{A}\cup\bar{B}$ y deducimos $\overline{A\cup B}\subset\bar{A}\cup\bar{B}$.

(c) Para todo $\alpha \in I$, $A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Por el apartado (a), $\overline{A}_\alpha \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha}$. Por tanto $\bigcup_{\alpha \in I} \overline{A} \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha}$.

La igualdad no es cierta en general ya que si $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{[\frac{1}{n}, 1]} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1] = (0, 1]$,

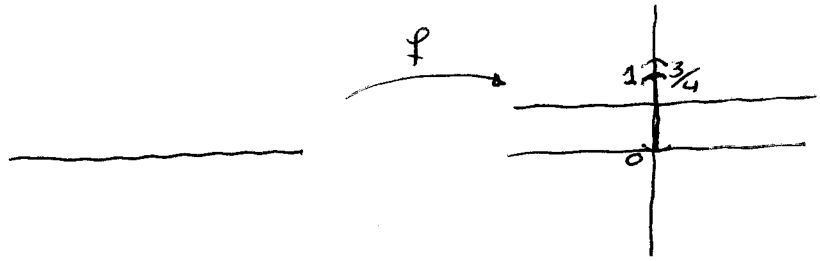
mientras que

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} [\tfrac{1}{n}, 1]} = \overline{(0,1)} = [0,1] \neq (0,1].$$

---

3 (b) Estudia si la aplicación $f: (\mathbb{R}, \tau_{us}) \longmapsto (\mathbb{R}^2, \tau_{ex})$ dada por $f(t) = (t, 3/4)$ es continua.

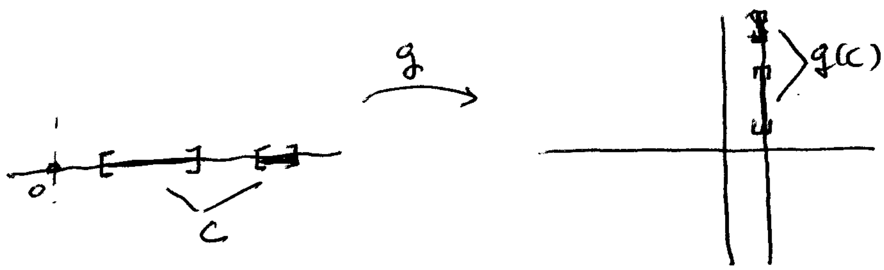
(b)



$f(t) = (t, \frac{3}{4})$

No es continua: para $V = \{0\} \times (0,1) \in \tau_{ex}$, se tiene que $f^{-1}(V) = \{0\}$ que no es abierto en τ_{us} de $\mathbb{R}$.

3(c) Estudia si la aplicación $g: (\mathbb{R}, \tau_{us}) \longmapsto (\mathbb{R}^2, \tau_{ex})$ dada por $g(t) = (1, t)$ es cerrada

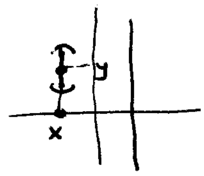


$g(t) = (1, t)$

g es cerrada: Sea C cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_{us})$. Entonces $g(C) = \{(1,t) : t \in C\}$. Tenemos que probar que $\mathbb{R}^2 \setminus g(C)$ es abierto en τ_{lex}. Observa que

$$\mathbb{R}^2 \setminus g(C) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\neq 1\} \cup \{(1,y)\in\mathbb{R}^2 :\ y\notin C\} = C_1 \cup C_2$$

$C_1 \in \tau_{lex}$ ya que si $(x,y)\in C_1$, $\{x\}\times(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \subset C_2$ y $\{x\}\times(y-\varepsilon, y+\varepsilon)\in\tau_{lex}$.



También $C_2\in\tau_{lex}$ ya que si $(x,y)\in C_2$, $x=1$ e $y\notin C$. Como C es cerrado en $\mathbb{R}$, existe $\varepsilon>0$ t.q. $(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \subseteq C^c$. Entonces $\{1\}\times(y-\varepsilon, y+\varepsilon)\subset C_2$.

Por tanto, $C_1\cup C_2$ es abierto, por ser unión de abiertos (en τ_{lex}) y $g(C)$ es cerrado en τ_{lex}.

x

4

4. (a) (X, τ) es de Hausdorff if $\forall x, y\in X$, $x\neq y$ existen $U\in E_{ab}(x)$, $V\in E_{ab}(y)$ tal que $U\cap V=\emptyset$.

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ si para todo $U\in E_{ab}(x)$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $x_n\in U$ para todo $n\geq N$.

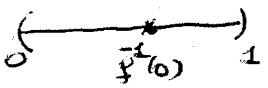
(b) Supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ con $x\neq y$. Como (X,τ) es Hausdorff, $\exists U\in E_{ab}(x)$ y $\exists V\in E_{ab}(y)$ t.q. $U\cap V=\emptyset$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\exists N_0\in\mathbb{N}$ t.q. $x_n\in U$ $\forall n\geq N_0$; como $\lim_{n\to\infty} x_n = y$, $\exists N_1\in\mathbb{N}$ t.q. $x_n\in V$ $\forall n\geq N_1$. Con $n\geq \max\{N_0, N_1\}$ se tiene $x_n\in U\cap V\neq\emptyset$. Esto contradice $U\cap V=\emptyset$, luego debe ser $x=y$.

(c) Todo $x \in \mathbb{R}$ es límite de la sucesión $\{n : n = 1, 2, \ldots\}$ ya que si $(a, \infty) \in \mathcal{E}ab(x)$ en $\mathcal{T} \rightarrow$ basta tomar $N \in \mathbb{N}$, $N > a$ para tener que si $n \geq N$, $n \in (a, \infty)$.

———— x ————

5. i) $X_1 \approx X_2$ pq. $f(t) = (1-t)a + tb$ es continua, sobre y con inversa $f^{-1}(s) = \dfrac{s-a}{b-a}$ que es continua ya que $b \neq a$

ii) $X_1 \not\approx X_3$: si existiera $f: X_1 \rightarrow X_3$ homeo, tomar $0 \in X_3$ y considerar $f^{-1}(0)$; entonces $f|_{X_1 \setminus \{f^{-1}(0)\}} : X_1 \setminus \{f^{-1}(0)\} \rightarrow (0,1)$ debe ser homeomorfismo.



Pero $(0,1)$ es convexo y $(0,1) - \{f^{-1}(0)\}$ no es convexo ya que $f^{-1}(0) \in (0,1)$.

iii) $X_1 \not\approx X_4$ pq. $X_4 = [2,5]$ es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, por tanto compacto, pero $(0,1) = X_1$ no lo es

iv) $X_2 \not\approx X_3$ pq. si X_2 fuera homeomorfo a X_3, también sería X_1 homeomorfo a X_3 y ya sabemos por ii) que no lo es

v) $X_2 \not\approx X_4$ pq. $X_4 = [2,5]$ es compacto (como en iii)), pero $X_2 = (a,b)$ no lo es

vi) $X_3 \not\approx X_4$ pq. $X_4 = [2,5]$ es compacto, pero $X_3 = [0,1)$ no es compacto, pq $\overline{[0,1)} = [0,1]$.

———— x ————

~~no es convexo ya que $f^{-1}(0) \in (0,1)$.~~