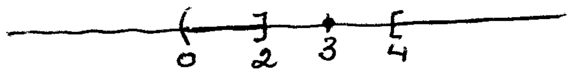
TOPOLOGÍA 30/05/2011

1. a) $\mathrm{Int}(A) = \{x \in X : \exists\, U \in E_{ab}(x),\ U \subset A\}$

$\bar{A} = \{x \in X : \forall\, U \in E_{ab}(x),\ U \cap A \neq \emptyset\}$

b) 

$\mathring{A} = [4, \infty)$, $\bar{A} = \mathbb{R}$ pq $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in [b, \infty) \Rightarrow [b,\infty) \cap A \neq \emptyset$

c) $\mathring{A} = \emptyset$ porque $(-\infty, x]$ no puede estar contenido en A

$\bar{A} = [0, \infty)$ pq. si $x \geq 0$, $(-\infty, x) \cap A \neq \emptyset$

---

2. a) (X, τ) es conexo si no existen $U, V \in \tau$ tal que $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = X$.

b) Sea $U = (-\infty, 0)$; como $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, 0)$ y $[-n, 0) \in \tau_{[)}$ se tiene que $U \in \tau_{[)}$. Por otro lado sea $V = [0, \infty)$. Como $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, n)$ y $[0, n) \in \tau_{[)}$ se tiene que $V \in \tau_{[)}$. Como $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = \mathbb{R}$ se tiene que $(\mathbb{R}, \tau_{[)})$ no es conexo.

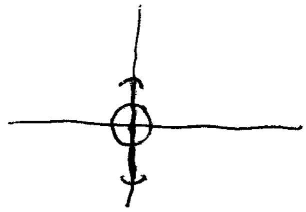
c) Si $f(X)$ no fuera conexo, existiría $g : (f(X), \tau_{f(X)}) \mapsto (\{0,1\}, \tau_{dis})$ continua y sobre. Entonces $g \circ f : (X, \tau) \to (\{0,1\}, \tau_{dis})$ sería continua (por ser composición de funciones continuas y sobre ya que $f : X \mapsto f(X)$ es sobre. Entonces, X no sería conexo

---

3 a) $f : (X, \tau) \mapsto (Y, \tau')$ es continua si $\forall\, V \in \tau'$, $f^{-1}(V) \in \tau$.

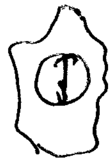
f es abierta si $\forall\, U \in \tau$, $f(U) \in \tau'$.

b) $f:(\mathbb{R}^2,\tau_u)\mapsto(\mathbb{R}^2,\tau_{lex})$, $f(x,y)=(-x,y)$



f no es continua pq. $V=\{0\}\times(-1,1)\in\tau_{lex}$ mientras que $f^{-1}(V)=\{0\}\times(-1,1)\notin\tau_U$ ya que $\forall\varepsilon>0$ $B_\varepsilon(0,0)\cap(\mathbb{R}^2-f^{-1}(V))\neq\emptyset$.

Pero es abierta; si $U\in\tau_U$, $f(U)=\{(x,y):(-x,y)\in U\}$ y $f(U)\in\tau_{lex}$ ya que si $(x,y)\in f(U)$, $(-x,y)\in U\Rightarrow\exists\,\varepsilon>0$ t.q. $B_\varepsilon(-x,y)\subset U\Rightarrow\{-x\}\times(y-\varepsilon,y+\varepsilon)\subset U$ $\Rightarrow\{x\}\times(y-\varepsilon,y+\varepsilon)\subset U$.



c) $f:(\mathbb{R}^2,\tau_{cof})\mapsto(\mathbb{R}^2,\tau_{cof})$, $f(x,y)=(-x,y)$

f es continua ya que si $V=\mathbb{R}^2-\{x_1,\dots,x_n\}\in\tau_{cof}$, $f^{-1}(V)=\mathbb{R}^n-\{-x_1,\dots,-x_n\}\in\tau_{cof}$.

f es abierta ya que si $U=\mathbb{R}^2-\{x_1,\dots,x_n\}\in\tau_{cof}$, $f(U)=\mathbb{R}^2-\{-x_1,\dots,-x_n\}\in\tau_{cof}$

x

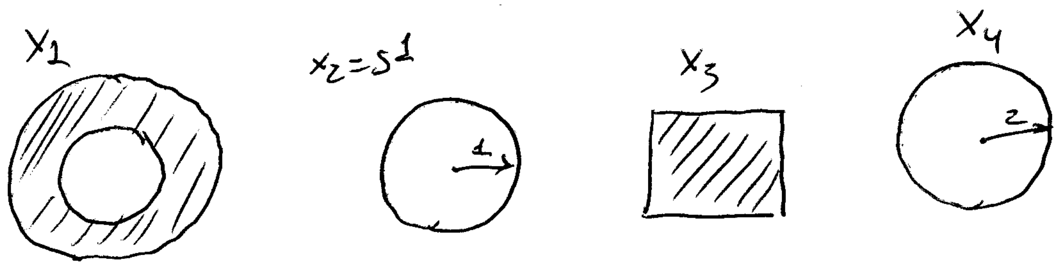
4. (a) $K\subset X$ es compacto si $\forall\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ recubrimiento de K por abiertos de X, existen $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in I$ t.q. $K\subset\bigcup_{j=1}^{n}U_{\alpha_j}$.

(b) Sean $K_1,\dots,K_N$ compactos en (X,τ) y $K=\bigcup_{n=1}^{N}K_n$. Sea $K\subset\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$, $U_\alpha\in\tau$. Como para todo $j=1,\dots,N$, $K_j\subset K\subset\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$ existe $\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jn}$ t.q. $K_j\subset\bigcup_{k=1}^{j_e}U_{\alpha_{jk}}$.

Entonces $K=\bigcup_{j=1}^{N}K_j\in\bigcup_{j=1}^{n}\bigcup_{e=1}^{j_e}U_{\alpha_{je}}$ y queda cubierto por una cantidad finita de abiertos del recubrimiento.

c) $[\frac{1}{n},1]$, $n\in\mathbb{N}$, son compactos en $(\mathbb{R}, \tau_{us})$ pq. son cerrados y acotados. Pero $\bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n},1]=(0,1]$ no es compacto, pq no es cerrado en $(\mathbb{R},\tau_{u})$

— x —

5) 

1) $X_1 \not\approx X_2$ pq. si $\exists\, f: X_2 \mapsto X_1$ homeomorfismo, dados $a\neq b \in X_2$, $f: X_2-\{a,b\} \longrightarrow X_1-\{f(a),f(b)\}$ sería homeo. Pero $X_2-\{a,b\}$ tiene dos componentes conexas y $X_1-\{f(a),f(b)\}$ solo tiene una.

2) Como $F(x,t)=(1-t)x+t\frac{x}{\|x\|}$ es un retracto de def. de X_1 en S^1, $\pi_1(X_1)\approx(\mathbb{Z},+)$. Entonces $X_1\not\approx X_3$ ya que $\pi_1(X_3)\approx\{0\}$ por ser X_3 convexo.

3) $X_1\not\approx X_4$ por el "mismo" razonamiento que en 1)

4) $X_2\not\approx X_3$ ya que $\pi_1(X_2)\approx(\mathbb{Z},+)$ y $\pi_1(X_3)\approx\{0\}$

5) $X_2\approx X_4$ con el homeo $f(x,y)=(2x,2y)$ cuya inversa es $g(x,y)=(\frac{x}{2},\frac{y}{2})$.

6) $X_3\not\approx X_4$ ya que $\pi_1(X_3)\approx\{0\}$ por ser convexo y $\pi_1(X_4)\approx(\mathbb{Z},+)$ pq. $X_4\approx X_2$.

— x —