UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID – CURSO 2010-11

TOPOLOGÍA. EXAMEN FINAL. CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA (L, 12-09-2011)

APELLIDOS .... **NOMBRE** ....

DNI: ....**GRUPO**.................... **FIRMA:** ....

---

1. Indica **razonadamente** si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) (**0,5 de punto**) En cualquier topología $(X, \mathcal{T})$, si A es un subconjunto de X entonces $X \setminus A$ es siempre un cerrado en la topología $\mathcal{T}$.

(b) (**0,5 de punto**) La topología $\mathcal{T}_{\rightarrow}$ es más fina que la topología usual en $\mathbb{R}$.

(c) (**0,5 de punto**) La topología $\mathcal{T}_{cof}$ es menos fina que la topología usual en $\mathbb{R}$.

(d) (**0,5 de punto**) El derivado del conjunto $A = \{\frac{(-1)^n}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\}$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{us})$ es el conjunto vacío.

---

2. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y A y B dos subconjuntos de X.

(a) (**0,4 de punto**) Demuestra que si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(b) (**0,8 de punto**) Demuestra que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(c) (**0,8 de punto**) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una colección de subconjuntos de X demuestra que

$$\bigcup_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha},$$

y da un ejemplo en donde no se cumpla la igualdad.

---

3. (a) (**0,4 de punto**) Define los conceptos de aplicación continua y de aplicación cerrada entre espacios topológicos.

(b) (**0,8 de punto**) Estudia si la aplicación $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{lex})$ dada por $f(t) = (t, 3/4)$ es continua.

(c) (**0,8 de punto**) Estudia si la aplicación $g : ((\mathbb{R}, \mathcal{T}_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{lex})$ dada por $g(t) = (1, t)$ es cerrada.

---

4. (a) (**0,6 de punto**) Define cuando un espacio topológico es de Hausdorff así como el límite de una sucesión $\{x_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ en un espacio topológico.

(b) (**0,8 de punto**) Prueba que en un espacio topológico de Hausdorff, si una sucesión tiene límite, éste es único.

(c) (**0,6 de punto**) Halla razonadamente todos los límites de la sucesión $\{n : n = 1, 2, 3 \dots\}$ en $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{\rightarrow}$.

---

5. (**2 puntos**) Decide razonadamente si los siguientes espacios topológicos son homeomorfos:

$$X_1 = (0, 1), \qquad X_2 = (a, b), a < b, \; a, b \in \mathbb{R}, \qquad X_3 = [0, 1), \qquad X_4 = [2, 5].$$

Duración: 3 horas