UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID – CURSO 2010-11
TOPOLOGÍA. EXAMEN FINAL. CONVOCATORIA ORDINARIA (L, 30-05-2011)

APELLIDOS .... **NOMBRE** ....

DNI: ....**GRUPO**..................... **FIRMA:** ....

---

1. a) (**0,4 de punto**) Define interior y clausura de un conjunto A en un espacio topológico.

Sean $\mathcal{T}_{\to}$ y $\mathcal{T}_{\leftarrow}$ las topologías en $\mathbb{R}$ cuyas bases son

$$\mathcal{B}_{\to} = \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_{\leftarrow} = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\},$$

respectivamente. Sea $A = (0,2] \cup \{3\} \cup [4,\infty)$.

(b) (**0,8 de punto**) Describe justificadamente el interior y la clausura de A en la topología $\mathcal{T}_{\to}$.

(c) (**0,8 de punto**) Describe justificadamente el interior y la clausura de A en la topología $\mathcal{T}_{\leftarrow}$.

---

2. a) (**0,4 de punto**) Define espacio topológico conexo.

b) (**0,8 de punto**) Sea $\mathcal{T}_{[)}$ la topología en $\mathbb{R}$ generada por la base $\mathcal{B}_{[)} = \{[a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. Demuestra que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[)})$ no es conexo.

c) (**0,8 de punto**) Sean $(X,\mathcal{T})$ e $(Y,\mathcal{T}')$ espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Demuestra que si X es conexo, entonces $f(X)$ es también conexo.

---

3. a) (**0,4 de punto**) Define los conceptos de aplicación continua y de aplicación abierta entre espacios topológicos.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (-x, y)$. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ las siguientes topologías: la topología usual $\mathcal{T}_u$, la topología del orden lexicográfico $\mathcal{T}_{lex}$ y la topología cofinita $\mathcal{T}_{cof}$.

b) (**0,8 de punto**) Estudia si $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{lex})$ es continua y abierta.

c) (**0,8 de punto**) Estudia si $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cof}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cof})$ es continua y abierta.

---

4. a) (**0,4 de punto**) Define subconjunto compacto K de un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$.

b) (**0,8 de punto**) Prueba que la unión finita de subconjuntos compactos de un espacio topológico es un conjunto compacto.

c) (**0,8 de punto**) Da un ejemplo de una familia infinita de subconjuntos compactos de un espacio topológico de manera que su unión no sea un conjunto compacto.

---

5. (**2 puntos**) Decide razonadamente si los siguientes espacios topológicos son homeomorfos:

$X_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

$X_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

$X_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

$X_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$.

---

6. (Sólo para matrícula de honor) Dado un conjunto X denota por $X^{\mathbb{N}}$ el conjunto producto

$$X^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : x_n \in X \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{T}$. Considera en $X^{\mathbb{N}}$ la topología $\mathcal{T}_p$ generada por la base $\mathbb{B}_p = \{\prod_{n=1}^{\infty} B_n : B_n \in \mathcal{B}, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, sean $\pi_j : X^{\mathbb{N}} \to X$ la aplicación dada por $\pi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = x_j$, y $S_j = \{\pi_j^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$. Considera en $X^{\mathbb{N}}$ la topología $\mathcal{T}'$ generada por la subbase $\mathcal{S} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j$.

a) Compara las topologías $\mathcal{T}_p$ y $\mathcal{T}'$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dada por $f(t) = (t, t, t, \ldots)$. Estudia la continuidad de f como aplicación de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}_p)$ y como aplicación de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}')$.

Duración: 3 horas