

MATEMÁTICAS

1º curso del Grado en Bioquímica – Curso 2010-11

HOJA DE EJERCICIOS 8

MÓDELOS DE EVOLUCIÓN CON MATRICES Y PROCESOS DE MARKOV

- Una población de aves se encuentra repartida entre dos humedales A y B . Se sabe que cada día un 70% de aves del humedal A se traslada a B mientras que un 50% de aves de B lo hace a A .
 - Describir en forma matricial la evolución de cada día al siguiente.
 - Si inicialmente había el mismo número de aves en cada humedal, ¿qué porcentaje de éstas están en cada uno de ellos después de dos días?
 - Si inicialmente había 120 aves en cada humedal ¿qué evolución seguirá el sistema a largo plazo?
- Se lleva a cabo un estudio sobre una población de ballenas azules. Las hembras son clasificadas en cuatro grupos de edad, y sobre cada grupo se obtiene la siguiente información en términos de fertilidad (número medio de crías hembras en cada período) y en términos de mortalidad:

GRUPO DE EDAD:	0 a 3	4 a 7	8 a 11	12 a 15
NO. MEDIO DE CRÍAS:	0	0'63	1'00	0'90
MORTALIDAD:	43%	43%	43%	100%

Formular un modelo matricial para la evolución de esta población. Si en un determinado momento, la población está formada por 20, 30, 40 y 20 ballenas hembra de cada tipo de edad, ¿cuál será la composición de la población (aproximadamente) al cabo de dos períodos de tiempo?

- En una granja de cría de cerdos, los animales son clasificados según sus edades de la siguiente forma: Cochinitos: de 0 a 1 año. Lechones: de 1 a 2 años. Jóvenes: de 2 a 3 años. Adultos: de 3 a 4 años.

El procedimiento de gestión de las hembras de la granja es el siguiente:

- Se sacrifica al 60% de las que van naciendo para su consumo como cochinitos.
- Se sacrifica para su consumo a todas las hembras cuando llegan a los 4 años. No se sacrifica a ninguna de las demás, y se supone que ningún animal muere por otras causas.
- Se dedica a todas las hembras jóvenes y adultas a la cría. Se sabe que, en media, cada hembra joven tendrá 0,5 camadas de 5 lechones, y cada hembra adulta 0,8 camadas de 5 lechones y que el 50% de todos los nuevos nacidos serán hembras.

Formular el modelo apropiado para describir la evolución del número de cerdas de cada clase.

- La población de cierta especie de animales en un bosque está dividida en dos grupos de edad (jóvenes y adultos). La correspondiente matriz de Leslie es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Interpreta el significado de cada uno de los elementos de la matriz anterior.
- Calcula el autovalor dominante de A y un autovector asociado.

- c) Sea $X(k)$ el número de animales de cada grupo en la etapa k . Si en la etapa 0 hay únicamente 10 animales jóvenes en el bosque, calcula $X(1)$, $X(2)$, $X(3)$ y $X(4)$. A partir de $X(4)$ calcula la proporción exacta de individuos de cada grupo respecto al total de la población en la etapa 4.
- d) Calcula la misma proporción de forma aproximada mediante el autovector asociado al autovalor dominante, y compara el resultado obtenido en este apartado con el del apartado anterior.
5. Supongamos que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$ es la matriz de transición de una población de venados hembras, dividida para su estudio en jóvenes y adultas.
- a) Demuestra que, a la larga, la población crecerá por un factor aproximado de 1.27.
- b) Los granjeros y otras personas del área no quieren que la población crezca. Pueden controlarla permitiendo la caza de venados adultos. Si h es la proporción de adultos cazados en cada período, ¿cuál será ahora la matriz de transición? (Observación: La proporción h se considera sobre el total de adultos al final del periodo, una vez que ya se ha tenido en cuenta la natalidad y la mortalidad debida a otras causas distintas a la caza)
- c) Prueba que $h = 0.6$ es una caza demasiado intensiva, es decir, la población de venados se extinguiría.
- d) Es posible seleccionar h de manera que la población de venados no crezca ni desaparezca. ¿Cuál sería ese valor de h ?
6. Estudiamos una población de aves. Clasificamos las hembras en tres grupos de edad: jóvenes (de 0 a 1 año), adultas fecundables (de 1 a 2 años), y adultas no fecundables (de 2 a 3 años). Sabemos que un 12% de las hembras jóvenes y un 54% de las adultas fecundables sobreviven cada año. Ninguna de las adultas no fecundables sobrevive. Cada hembra fecundable produce dos hembras al año (en promedio).
- a) Describir la evolución de la población en forma matricial.
- b) Transcurridos unos años, determina en que tanto por ciento crecerá o decrecerá anualmente la población de hembras.
- c) Determina cuál debería ser el tanto por ciento de supervivencia de las hembras jóvenes para que la población se mantuviera estable.
7. Una compañía de alquiler de coches tiene 3 sedes A, B y C. Se observa que de los clientes que alquilan el coche en A sólo el 80% lo devuelve de nuevo a A, mientras que un 10% lo devuelve en B y el otro 10% en C. De entre quienes alquilan el vehículo en B, 30% lo devolverá en A, 20% en B y 50% en C. Por último, de los que alquilan en C, 20% lo devuelve en A, 60% en B y 20% en C. ¿Qué proporción de vehículos quedará en cada sede con el paso del tiempo?
8. Una población de conejos de laboratorio tiene las siguientes características: la vida máxima de cada conejo es de 3 años; sólo la cuarta parte de los conejos sobrevive el primer año y sólo la mitad sobrevive el segundo año. Los conejos de primer año no tienen descendencia, mientras el número medio de descendientes es de 13 en el segundo año y de 12 en el tercero.
- (a) Escribe la matriz de Leslie que describe la evolución de esta población.
- (b) Experimentalmente se observa que la población total de conejos esencialmente se duplica cada año. ¿Sabrías justificar por qué esto es así? Calcula a partir de este dato el porcentaje de conejos que habrá en cada clase.
- (c) Por motivos de espacio, querríamos que la población total creciera, a lo sumo, un 50% cada año. Para ello el laboratorio sólo conserva k crías por cada conejo de segundo año, vendiéndose el resto. ¿Quién debería ser k ?