MATEMÁTICAS
1º curso del Grado en Bioquímica – Curso 2010-11

HOJA DE EJERCICIOS 6

APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE INTEGRALES.

1. Aproximar el valor de $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx$

   a) Usando la regla del trapecio con 4 subintervalos.

   b) Usando la regla de Simpson con 4 subintervalos.

2. La concentración de oxígeno $f(t)$ en un estanque contaminado con un residuo orgánico varía a lo largo del tiempo. La velocidad de variación viene dada por: $v(t) = \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}$,($t$=tiempo en semanas).

   a) Hallar la diferencia aproximada de concentración de oxígeno entre $t = 0$ y $t = 1$ mediante la regla de Simpson, considerando 4 subintervalos.

   b) Comparar el resultado aproximado con el exacto, sabiendo que $f(t) = \frac{t^2-t+1}{t^2+1}$, para $t \geq 0$.

3. La variable aleatoria X sigue una distribución $N(0; 1)$, teniendo como función de densidad: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Hallar $P(0 < X < 2)$ y $P(X > 2)$, utilizando la regla de Simpson con 4 subintervalos.

4. Sabemos que $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\, dx = \pi$. Usar la regla de Simpson con cuatro subintervalos para aproximar el valor de π.

ECUACIONES DIFERENCIALES.

5. Consideramos la ecuación diferencial $x' = \frac{dx}{dt} = \frac{tx}{1+t^2}$ con $x(0) = 1$. Hallar la función $x(t)$.

6. Llamamos $x(t)$ a la cantidad de individuos de una especie que existe en un instante t. Se sabe que la velocidad de crecimiento de x con respecto a t es proporcional a $x(1 - x)$. Resolver la ecuación diferencial correspondiente dejando la solución en función del dato inicial.

7. Un material radioactivo se elimina a una velocidad proporcional a la cantidad de material existente en cada momento. Su vida media es 1200 años.

   a) ¿Qué porcentaje de material radioactivo queda después de 10 años?

   b) ¿Cuántos años se requerirá para reducir la cantidad al 10%?

8. Al abrir una cuenta en un banco de los que operan por Internet, nos dicen que nos van a abonar cada mes un 3,5% de interés continuo sobre el capital acumulado, durante los 6 primeros meses. Si inicialmente depositamos 3000 euros, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta al cabo de esos 6 meses? Resolverlo mediante una ecuación diferencial.

9. Si el poder adquisitivo del euro se reduce en una tasa efectiva del 4,25% anualmente, ¿cuánto tiempo tardaría en reducirse a 25 céntimos el valor actual de 1 euro?

10. De acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura $T(t)$ de un objeto introducido en un ambiente más frio con temperatura constante A grados varía a una velocidad proporcional a $T(t) - A$ (el exceso de temperatura). Un médico forense mide la temperatura de un cadáver que resulta ser 29,4 grados centígrados. Dos horas después vuelve a medirla y resulta ser 23'3 grados centígrados. Si la temperatura ambiente es 20 grados centígrados ¿Cuánto tiempo hace que murió la persona contando desde la primera medición?

11. Se observa que la velocidad de variación del número de individuos de una población viene dada por: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{100}(x - 100)(200 - x)$. Inicialmente hay $x(0) = 180$ individuos.

    a) Hallar la función $x(t)$.

    b) Calcular en qué valor tiende a estabilizarse la población cuando el tiempo crece.

12. La velocidad de propagación de una enfermedad infecciosa en una población constante de N individuos es proporcional al producto del número de infectados $I(t)$ y el número de sanos $S(t) = N - I(t)$ en el instante t. En una poblacion de 10.000 individuos, de los cuales 10 están infectados inicialmente, se observa que un mes después hay 20 infectados.

    a) Hallar $I(t)$ y $S(t)$ resolviendo la correspondiente ecuación diferencial para $I(t)$ y dibujar sus gráficas.

    b) ¿Cuál es el comportamiento a largo plazo del número de infectados?

    c) ¿En cuántos meses estará infectada más de la mitad de la población?

13. Al comienzo de cierto año, se tienen censados 540 gamos en el Monte de El Pardo. El ritmo de aumento natural anual de la población es del 12%; para evitar un crecimiento descontrolado, se abaten todos los años 40 gamos.

    a) Plantear la variación anual del tamaño de la población en función del tiempo (dN/dt), y obtener $N(t)$ a partir de esta ecuación diferencial.

    b) ¿Cuál sería el número aproximado de gamos al cabo de 20 años si este plan se lleva a cabo?

14. Cada 8 horas tomamos 200 miligramos de un medicamento, y cada 8 horas el cuerpo elimina una quinta parte de lo que tiene.

    a) Escribir la función que expresa el número de miligramos en el organismo en función del tiempo (tomando como unidad de tiempo los intervalos de 8 horas).

    b) A largo plazo, ¿cuál será la cantidad de medicamento en el organismo?

15. Un tanque contiene inicialmente 100 litros de agua con sal. El contenido total de sal es de 1 Kg. En un determinado momento, se comienza a sacar líquido del tanque, a razón de 3 litros por minuto (con lo cual, cada minuto, se pierde un 3% de sal). Para que la cantidad total de líquido se mantenga constante, cada minuto se añaden 3 litros de otra solución salina cuyo contenido en sal es de 250 gramos por litro (con lo cual, cada minuto, se añaden 750 gr. de sal).

    a) Hallar la cantidad de sal en el tanque, $S(t)$, en función del tiempo, a partir de la ecuación diferencial correspondiente.

    b) Determinar el momento en que la solución del tanque contiene 13 Kg. de sal.

    c) Calcular la cantidad de sal que habrá a largo plazo.

16. Se está estudiando una especie de gato montés. Se cuenta la población de estos animales un cierto año y se obtiene que hay 100. Se sabe que bajo buenas condiciones medioambientales, la tasa anual de crecimiento de la población es de 1,676%. Esto puede provocar un desequilibrio ecológico en la zona. Para solucionar esto, se consideran dos planes.

    El primero es permitir la caza de un gato al final de cada año.

    El segundo es permitir que se cace un 1% de los gatos al final de cada año.

    Plantear las ecuaciones diferenciales correspondientes a cada plan y calcular cuál sería la población aproximada al cabo de 25 años, con cada uno de ellos.