MATEMÁTICAS
1º curso del Grado en Bioquímica – Curso 2010-11

HOJA DE EJERCICIOS 5

INTEGRACIÓN.

1. Calcular las siguientes integrales usando el cambio de variables:

$$a)\ \int \frac{1}{x}\, e^{1+\ln x}\, dx \qquad b)\ \int \tan x \sec^2 x\, dx \qquad c)\ \int \frac{x}{\sqrt{2-x^4}}\, dx$$

$$d)\ \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx \qquad e)\ \int x^5\sqrt{1-x^2}\, dx$$

2. Evaluar las siguientes integrales definidas haciendo un cambio de variable:

$$a)\ \int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx \qquad b)\ \int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{4x^2+3}}\, dx \qquad c)\ \int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx$$

3. Calcular las siguientes integrales con la técnica de integración por partes:

$$a)\ \int e^x \operatorname{sen} x\, dx \qquad b)\ \int x^2 \ln x\, dx \qquad c)\ \int x^5 \cos(x^2)\, dx \qquad d)\ \int x \sec^2 x\, dx$$

4. Evaluar las siguientes integrales definidas usando integración por partes:

$$a)\ \int_0^{\pi/3} x\cos x\, dx \qquad b)\ \int_0^1 x\, e^{-x}\, dx$$

5. Escribir $\arccos x = 1 \cdot \arccos x$ y usar la integración por partes y a continuación un cambio de variable para calcular

$$\int \arccos x\, dx$$

6. Utilizar el método de integración por partes para calcular, para $x > 0$, la integral

$$\int \frac{1}{x}\, \ln x\, dx$$

7. Utilizar el método de la descomposición en fracciones simples (factores lineales) para evaluar

$$a)\ \int \frac{1}{x^2-5x+6}\, dx \qquad b)\ \int \frac{x^4+3}{x^2-4x+3}\, dx \qquad c)\ \int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\, dx$$

8. Completar cuadrados para calcular

$$a)\ \int \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx \qquad b)\ \int \frac{2x}{x^2-2x+10}\, dx$$

9. Utilizar el método de la descomposición en fracciones simples (factores lineales y cuadráticos irreducibles) para evaluar

$$a)\ \int \frac{x^3+1}{x^2+3}\, dx \qquad b)\ \int \frac{x^2-1}{x^3+x}\, dx \qquad c)\ \int \frac{x^2-4x+7}{x^3-x^2+x+3}\, dx$$

10. La velocidad de crecimiento del tamaño de una poblacaion $x(t)$ es proporcional no solo a $x(t)$ sino también a la diferencia entre el tamaño máximo de la poblacion L y el tamaño de la población $x(t)$, es decir $\frac{dx}{dt} = kx(L-x)$. En forma integral podemos escribir

$$\int \frac{dx}{x(L-x)}\,dx = \int k\,dt\,.$$

a) Si $x(0) = 1000$ y $L = 5000$, evaluar las dos integrales de la fórmula anterior y escribir $x(t)$ en función de t.

b) Tomar $k = 10^{-4}$. ¿Cuánto tiempo tarda la población en alcanzar los 2500 individuos? (el tiempo se mide en años)

c) ¿Cuál es el comportamiento a largo plazo de la población?

11. Dibujar la región delimitada por las rectas y curvas que se indican y calcular su área:

a) $y = \operatorname{sen} x,\ x = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{\pi}{2}$ y el eje x.

b) $y = 5 - x^2$ e $y = 3 - x$.

c) $y = x^2,\ y = \frac{1}{x}$ e $y = 4$ en el primer cuadrante.

12. El tamaño $N(t)$ de una población varía a lo largo del tiempo. Su velocidad de variación viene dada por:

$$v(t) = \frac{30\,e^{-0'1t}}{(1+3\,e^{-0'1t})^2} \qquad (t\text{=“tiempo en años”}).$$

a) Calcular la variación de la población entre $t = 0$ y $t = 20$.

b) Si $N(0) = 25$. ¿cuál es el tamaño de la población al cabo de 20 años?

13. Desde 1985 hasta 1994, la variación del consumo de carne (en millones de kilos por año) en un pais puede modelarse por $v(t) = 26'7 - 0'3t$ si $5 \le t \le 10$ y $v(t) = 21 + 0'27t$ si $10 \le t \le 14$, donde t se mide en años y $t = 5$ corresponde a 1985. Suponed que la variacion del consumo de carne entre 1990 y 1994 hubiera seguido el mismo modelo que el de los años 1985 a 1990. ¿Que cantidad de carne se hubiera ahorrado entre 1990 y 1994?

14. Calcular, si es posible, las siguientes integrales impropias:

a) $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ b) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$ c) $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/4}}dx$

15. Hallar el valor de C para que la función $f(x) = C(x - x^2)$ sea un función de densidad en $[0, 1]$. Calcular Pr $(X \ge 1/2)$, donde X es la variable aleatoria con función de densidad $f(x)$.

16. El tiempo T, en años, que un átomo sobrevive en una muestra radiactiva sigue una variable aleatoria exponencial con parámetro $\lambda = 5 \times 10^{-5}$ ¿Cuál es el porcentaje de átomos que no se han desintegrado en esta muestra después de pasar 30.000 años?

17. El tiempo T, en horas, entre dos fallos de un servidor de correo electrónico es, aproximádamente, una variable aleatoria de tipo exponencial con $\lambda = 0'05$. Calcular la probabilidad de que el servidor funcione durante 12 horas sin fallos, después de haberlo puesto en funcionamiento.

18. Sea X una varible aleatoria de tipo exponencial con parámetro λ. Calcular

$$\Pr\,(|X - \frac{1}{\lambda}| < \frac{1}{\lambda})$$