MATEMÁTICAS
1º curso del Grado en Bioquímica – Curso 2010-11

HOJA DE EJERCICIOS 3

DERIVACIÓN

1. Sabemos que $(\ln x)' = 1/x$ $(x > 0)$ y que $(e^x)' = e^x$. Usar la regla de la cadena para calcular

   $a)$ $(a^x)'$, $a > 0$ $\qquad$ $b)$ $(x^a)'$, $a \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $c)$ $(\log_a x)'$, $a > 0$

2. Sabemos que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$ y que $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Usar la regla de la cadena para calcular

   $a)$ $(\operatorname{arcsen} x)'$ $\qquad$ $b)$ $(\arccos x)'$ $\qquad$ $c)(\operatorname{arctg} x)'$.

3. Usar las reglas de derivación para calcular las derivadas de las siguientes funciones a partir de las derivadas de las funciones elementales:

   $a)$ $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}, x \neq 3$ $\qquad$ $b)$ $f(x) = e^{3x^2-1}$ $\qquad$ $c)$ $f(x) = \ln \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$

   $d)$ $f(x) = (0,2)^{3,2x}$ $\qquad$ $e)$ $f(x) = (x^2+1)^{3,2x}$ $\qquad$ $f)$ $f(x) = (\log x)^2$

   $g)$ $f(x) = \operatorname{sen}(x^2-1)$ $\qquad$ $h)$ $f(x) = [\cos(7x)]^3$ $\qquad$ $i)$ $f(x) = \operatorname{tg}(3x-2)$

   $j)$ $f(x) = \arccos(5x)$ $\qquad$ $k)$ $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{e^x+1}$ $\qquad$ $l)$ $f(x) = e^{2x}\ln(x^2+1)$

4. ([N], Sección 4.6.1, Ej. 63) El modelo logístico para una población de tamaño $N(t)$ en el instante t es

   $$N(t) = \frac{K}{1 + (\frac{K}{N_0} - 1)e^{-rt}},$$

   donde N_0 es el tamaño inicial de la población y K, r son constantes positivas con $K > N_0$.

   a) Se llama capacidad de alojamiento de una población al mayor tamaño posible de ésta. ¿Cuál es la capacidad de alojamiento en el modelo logístico?

   b) Calcular la derivada de $N(t)$ y probar que $N'(t) = rN(1 - \frac{N}{K})$.

   c) Tomar $K = 10000$ y $r = 5,6$ en este apartado. Dibujar la velocidad de crecimiento per cápita en función de N, es decir $v(N) = \frac{1}{N}N'(t)$. ¿Aumenta o disminuye $v(N)$ al aumentar el tamaño de la población?

5. ([N], Sección 4.6.1, Ej. 64) El modelo $R(P) = aPe^{-bP}$, $P > 0$, se usa en la literatura pesquera para describir el número de peces nuevos R en función de la cantidad P de progenitores.

   a) Derivar R con respecto a P.

   b) Calcular todos los puntos de la función $R(P)$ que tengan una tangente horizontal.

   c) Calcular todos los puntos de la función $R(P)$ en los que la segunda derivada sera cero.

   d) Dibujar la gráfica de $R(P)$ cuando $a = 0,2$ y $b = 0,001$. ¿Puedes interpretar en esta situación el resultado obtenido en el apartado b)?

6. ([N], Sección 5.2.3, Ej. 29) La velocidad de crecimiento de una población se expresa como

   $$v(N) = N\left(1 - \left(\frac{N}{K}\right)^a\right), \qquad N \geq 0,$$

   siendo N el tamaño de la población, K una constante positiva que indica la capacidad de alojamiento y a un parámetro mayor o igual que 1. Calcular $v'(N)$ y determinar donde es creciente y decreciente la velocidad de crecimiento.

7. ([N], Sección 5.2.3, Ej. 30) Los gusanos de las yemas del abeto son una importante plaga que desfolia los pinos de Canadá. Sus depredadores son los pájaros. Un modelo para la velocidad de depredación per cápita es el siguiente:

$$v(N) = \frac{aN}{k^2 + N^2}, \qquad N \geq 0,$$

siendo N la densidad de gusanos y a y k constantes positivas. Calcular $v'(N)$ y determinar donde es creciente y decreciente la velocidad de depredación. Dibujar la gráfica de v.

8. ([N], Sección 5.2.3, Ej. 33) Suponer que la altura en metros, y, de un árbol es función de la edad del árbol en años, x, y está dada por

$$y = 34e^{-10/x}, \qquad x > 0.$$

(a) Demostrar que la altura del árbol se incrementa con su edad ¿Cúal es la máxima altura alcanzable?

(b) ¿Dónde es cóncava y donde es convexa la gráfica de la altura?

(c) Dibuja la gráfica de la altura frente a la edad.

(d) ¿En que punto es máxima la velocidad de crecimiento? ¿Es éste algún punto significativo de la gráfica de y?

9. ([N], Sección 5.2.3, Ej. 33) Sea $N(t)$ el tamaño de una población y suponga que cumple

$$\frac{dN(t)}{dt} = Ne^{-aN} - N^2, \qquad N > 0,$$

siendo a una constante positiva.

(a) Una población se dice que está en equilibrio si su tamaño N^* hace que la velocidad de crecimiento sea nula. Demuestra que en la población de este ejercicio el punto de equilibrio N^* cumple $e^{-aN^*} = N^*$.

(b) Suponer ahora que el punto de equilibrio N^* es función del parámetro a. Utilizar derivación implicita para demostrar que N^* es una función decreciente de a.

10. En los siguientes ejercicios determinar los intervalos de crecimiento y decrecimento, los máximos y mínimos locales, la concavidad, la convexidad, los puntos de imflexión y las asíntotas de las funciones dadas. Dibujar la gráfica de cada una de ellas.

$$a)\ f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x+2},\ x \neq -2 \qquad (b)\ f(x) = \frac{x^2}{25 + x^2} \qquad (c)\ f(x) = \frac{x^3}{1 + x^3}.$$

Para cada una de ellas indica sus valores máximo y mínino en el intervalo $[-1, 3]$.