MATEMÁTICAS
1º curso del Grado en Bioquímica – Curso 2010-11

HOJA DE EJERCICIOS 1

FUNCIONES ELEMENTALES. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

1. Sea
$$f(x) = \frac{2x}{3+x}\,.$$
Dibuja la gráfica de f. Indica el dominio y el recorrido de la función f. ¿Para qué valor de x es $f(x) = 1$.

2. La función de crecimiento de Monod modela el crecimiento como función de la concentración de nutrientes N. Supongamos que
$$r(N) = \frac{5N}{1+N}\,, \quad N \geq 0\,.$$
Dibuja su gráfica. Obtener el porcentaje de incremento cuando se dobla la concentración de nutrientes desde $N = 0,1$ hasta $N = 0,2$. Comparar esto con lo que se obtiene al doblar la concentración de nutrientes de $N = 10$ hasta $N = 20$. (Esto es un ejemplo de lo que se conoce como *retorno en disminución*).

3. El *modelo exponencial*
$$y = N_0\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)^t$$
(o bien $y = e^{rt}$ con $r = \ln(1 + \frac{\alpha}{100})$) corresponde al crecimiento (o decrecimiento) del tamaño de una población del $\alpha\%$ en cada unidad de tiempo, partiendo de un valor inicial de N_0 (en $t = 0$).

   a) Representar en una misma gráfica las funciones
$$f_1(t) = 100e^{2t}, \quad f_2(t) = 100e^{0'5t}, \quad f_3(t) = 1000e^{-t}.$$

   b) Si cierta población crece un 5% por unidad de tiempo y $N_0 = 100$, ¿cuál es la población en el instante $t = 3$? ¿Y en $t = 50$?

4. La *función logarítmica*
$$y = a + b\ \ln x \qquad (\text{para } x > 0)$$
se utiliza, por ejemplo, para describir empíricamente la relación entre la concentración (X) de una hormona de crecimiento para plantas y el tamaño alcanzado por la planta (Y).

   a) Esbozar en una misma gráfica las funciones $y_1 = 10 + 2\ln x$, $y_2 = 10 + 0'5\ln x$.

   b) En cada una de las funciones, ¿cuánto crece la planta cuando duplicamos la concentración de hormona?

   c) Hallar las constantes a, b si sabemos que la altura es $Y = 28$ cuando $X = 2'5$, y que cada vez que se duplica la concentración la altura aumenta en 3 unidades.

5. Hace tiempo, los zoólogos encontraron que las medidas realizadas en dos partes diferentes del cuerpo (X e Y) de individuos en crecimiento de una especie animal, se podían relacionar (aproximadamente) de la siguiente forma:
$$\ln y = k + b\ \ln x \qquad \textit{(relación alométrica),}$$
o lo que es igual:
$$y = e^k e^{b\ln x} = ax^b, \qquad \text{para } x > 0.$$
Esbozar en una misma gráfica las funciones $y_1 = 0'1x^3$, $y_2 = 0'1x^{1.3}$, $y_3 = 0'1x^{1/2}$.

6. El número de individuos en poblaciones con recursos limitados se suele modelizar con una *función logística* (o sigmoide):

$$y = f(t) = \frac{k}{1+ae^{-rt}}, \quad t \in (0, \infty), \quad \text{donde } a, k, r \text{ son ctes } > 0.$$

a) Representa las funciones $f_1(t) = \dfrac{150}{1+2e^{-t}}$ y $f_2(t) = \dfrac{150}{1+2e^{-2t}}$ para $t > 0$.

b) ¿En qué tamaño tienden a estabilizarse las poblaciones? ¿Cuándo se alcanza el 90% de la población máxima?

7. En una reacción bioquímica controlada por una enzima, la velocidad (v) de conversión de una sustancia (para una cantidad fija de enzima) viene dada por

$$v = f(s) = \frac{as}{k+s}, \qquad \text{para } s > 0 \qquad (a, k > 0),$$

donde s es la concentración del sustrato que está siendo convertido. Esta función se conoce con el nombre de *función de Michaelis-Menten.*

a) Esbozar en una misma gráfica las funciones $v = \frac{10s}{k+s}$ para los valores $k = 1, 2, 5$.

b) Hallar la velocidad máxima de conversión que se puede alcanzar en cada caso.

c) Calcular cuál debe ser la concentración del sustrato para que la velocidad de conversión sea la mitad de la máxima alcanzable.

8. La vida media del C^{14} es 5730 años. Supongamos que una muestra de C^{14} tiene una masa de 20 microgramos en el instante $t = 0$.

a) ¿Cuánto quedará después de 2000 años?

b) ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir hasta que queden 5 microgramos?

9. Entre 1960 y 1990, el Observatorio Mauna Loa en Hawaii midió la concentración y de CO_2 en partes por millón (ppm) en la atmósfera. Los datos del mes de enero de cada uno de estos años se ajustaron a dos modelos

a) Modelo lineal $y = 313,6 + 1,24t$ b) Modelo cuadrático $y = 316,2 + 0,70t + 0,018t^2$.

(En estos modelos $t = 0$ se corresponde con el año 1960). Dibuja en un mismo gráfico ambas funciones. En la publicación de julio de 1990 de Scientific American, uno de estos modelos se usó para concluir que el nivel de CO_2 en la atmósfera en el año 2035 sería de 470ppm. ¿Cuál de los dos modelos se usó para hacer esta predicción?

10. El crecimiento de algunas especies de peces se puede modelar mediante la función de von Bertalanffy

$$L(x) = L(1 - e^{-kx}), \quad x \geq 0,$$

siendo $L(x)$ la longitud a la edad x, con k y L constantes positivas.

a) Dibujar las gráficas de $L(x)$ cuando $L = 1$ para i) $k = 1$, y ii) $k = 0,1$.

b) Para $k = 1$ obtener el valor de x para que la longitud sea el 90% de L.

c) Comparar las gráficas obtenidas en a). ¿Cúal de las curvas de crecimiento alcanza el 90% de L más rápido?