

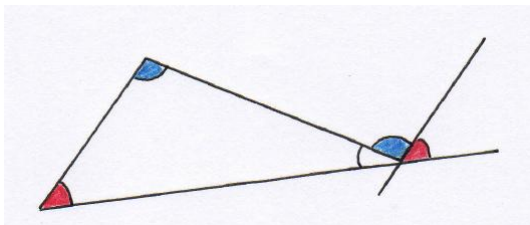
## 4. GEOMETRÍA // 4.2. DEMOSTRACIONES VISUALES.

Eugenio Hernández

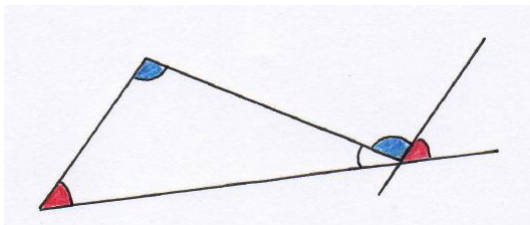
COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR  
EN MATEMÁTICAS  
Curso 2010-2011

## 4.2.1. Una mirada a los ángulos.

## 4.2.1. Una mirada a los ángulos.

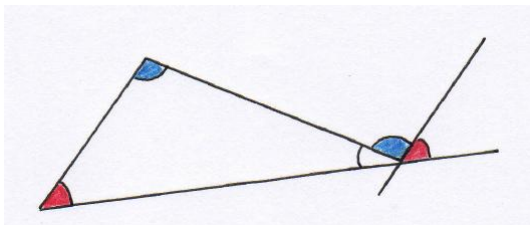


## 4.2.1. Una mirada a los ángulos.



La suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ .

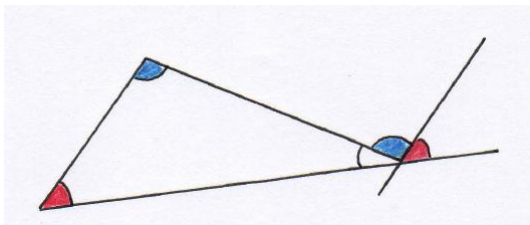
## 4.2.1. Una mirada a los ángulos.



La suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ .

**Ejercicio 1.** Presenta una demostración visual similar a la del triángulo que muestre que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es  $360^\circ$ .

## 4.2.1. Una mirada a los ángulos.



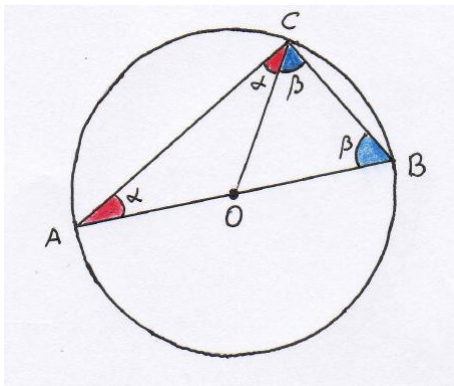
La suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ .

**Ejercicio 1.** Presenta una demostración visual similar a la del triángulo que muestre que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es  $360^\circ$ .

**Ejercicio 2.** Prueba que en un polígono convexo de  $n$  lados la suma de sus ángulos interiores es  $180(n - 2)^\circ$ .

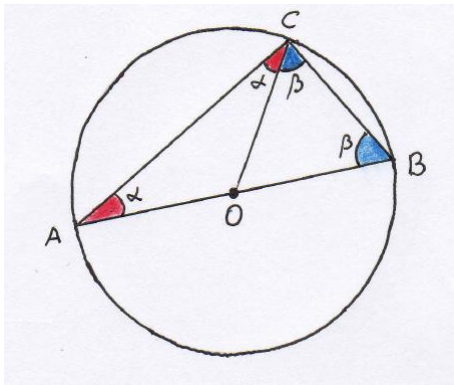
Un ángulo se dice **inscrito** en una circunferencia si su vértice está sobre la circunferencia y sus lados son cuerdas de ésta.

Un ángulo se dice **inscrito** en una circunferencia si su vértice está sobre la circunferencia y sus lados son cuerdas de ésta.





Un ángulo se dice **inscrito** en una circunferencia si su vértice está sobre la circunferencia y sus lados son cuerdas de ésta.

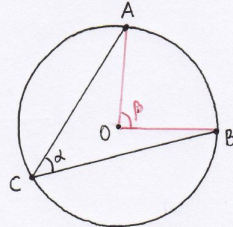


Todo ángulo inscrito en una circunferencia que abarca un arco cuya cuerda es un diámetro es un ángulo recto.

## MEDIDA DE UN ÁNGULO INSCRITO

Todo ángulo inscrito en una circunferencia mide la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco:

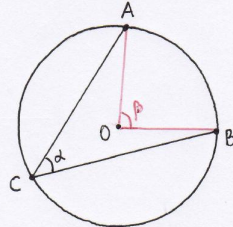
$\alpha = \beta/2$  en la figura.



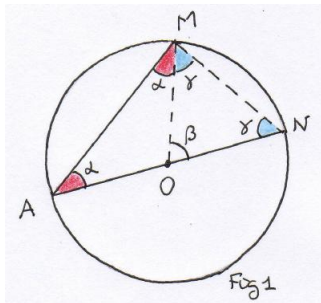
## MEDIDA DE UN ÁNGULO INSCRITO

Todo ángulo inscrito en una circunferencia mide la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco:

$\alpha = \beta/2$  en la figura.

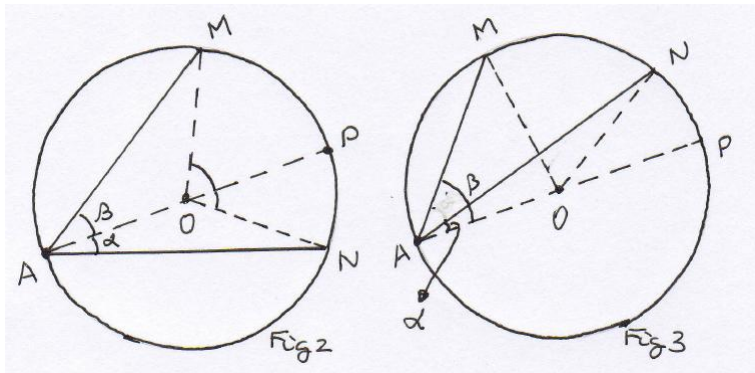


**D./** Supongamos primero que uno de los lados del ángulo es un diámetro de la circunferencia. La figura 1 permite demostrar el resultado.



Si el centro de la circunferencia está en el interior del ángulo (Figura 2) o si está en el exterior (Figura 3), razona sobre las figuras siguientes para deducir el resultado.

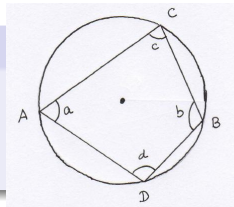
Si el centro de la circunferencia está en el interior del ángulo (Figura 2) o si está en el exterior (Figura 3), razona sobre las figuras siguientes para deducir el resultado.



Un cuadrilátero se dice **cíclico** si sus vértices están en un circunferencia.

### ÁNGULOS EN UN CUADRILÁTERO CÍCLICO

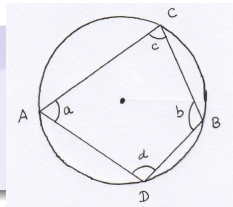
En todo cuadrilátero cíclico sus ángulos opuestos son suplementarios ( $a + b = 180^\circ$  y  $c + d = 180^\circ$ ).



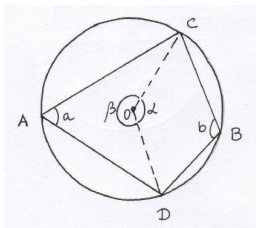
Un cuadrilátero se dice **cíclico** si sus vértices están en un circunferencia.

### ÁNGULOS EN UN CUADRILÁTERO CÍCLICO

En todo cuadrilátero cíclico sus ángulos opuestos son suplementarios ( $a + b = 180^\circ$  y  $c + d = 180^\circ$ ).



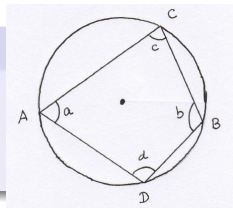
**D./** Si el centro de la circunferencia está en el interior del cuadrilátero ayúdate de la figura que sigue para demostrar el resultado.



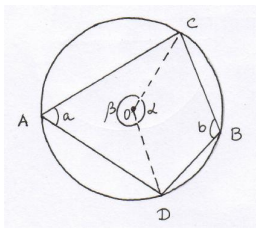
Un cuadrilátero se dice **cíclico** si sus vértices están en un circunferencia.

### ÁNGULOS EN UN CUADRILÁTERO CÍCLICO

En todo cuadrilátero cíclico sus ángulos opuestos son suplementarios ( $a + b = 180^\circ$  y  $c + d = 180^\circ$ ).



**D./** Si el centro de la circunferencia está en el interior del cuadrilátero ayúdate de la figura que sigue para demostrar el resultado.



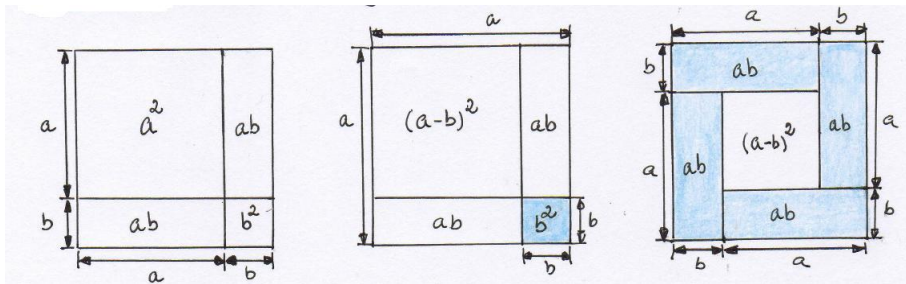
Haz otras figuras cuando el centro de la circunferencia esté en un lado del cuadrilátero o en su exterior.





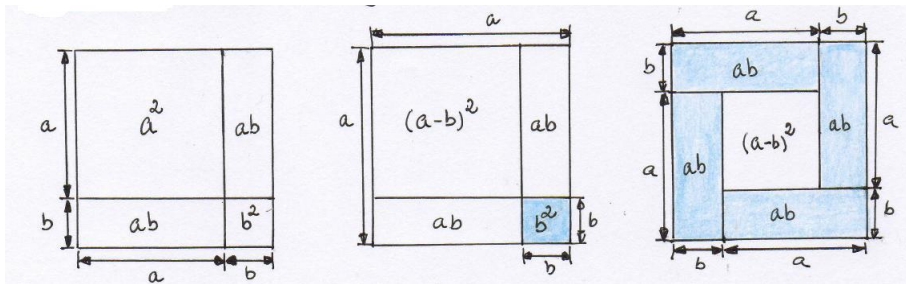
## 4.2.2. Identidades algebraicas desde un punto de vista visual.

### Cuadrado de una suma y de un diferencia



## 4.2.2. Identidades algebraicas desde un punto de vista visual.

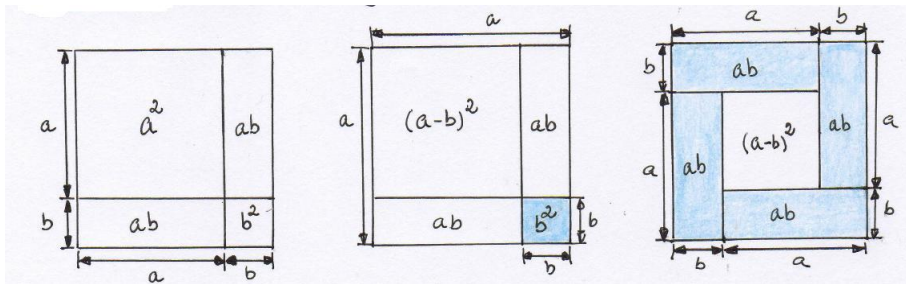
### Cuadrado de una suma y de un diferencia



$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad , \quad (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

## 4.2.2. Identidades algebraicas desde un punto de vista visual.

### Cuadrado de una suma y de un diferencia



$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

## Los números de Fibonacci

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad \text{y} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{si} \quad n \geq 3$$

## Los números de Fibonacci

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad \text{y} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{si} \quad n \geq 3$$

Por tanto:  $F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, \dots$

## Los números de Fibonacci

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad \text{y} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{si} \quad n \geq 3$$

Por tanto:  $F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, \dots$

**Ejercicio 3.** Demuestra algebraica y visualmente la igualdad

$$F_{n+1}^2 = 4F_n F_{n-1} + F_{n-2}^2$$

## Los números de Fibonacci

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad \text{y} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{si} \quad n \geq 3$$

Por tanto:  $F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, \dots$

**Ejercicio 3.** Demuestra algebraica y visualmente la igualdad

$$F_{n+1}^2 = 4F_n F_{n-1} + F_{n-2}^2$$

**Ejercicio 4.** Demuestra visualmente la igualdad

$$F_{n+1}^2 = F_n^2 + F_{n-1}^2 + 2F_n F_{n-1}$$

## Los números de Fibonacci

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad \text{y} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{si} \quad n \geq 3$$

Por tanto:  $F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, \dots$

**Ejercicio 3.** Demuestra algebraica y visualmente la igualdad

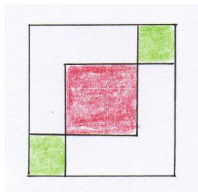
$$F_{n+1}^2 = 4F_n F_{n-1} + F_{n-2}^2$$

**Ejercicio 4.** Demuestra visualmente la igualdad

$$F_{n+1}^2 = F_n^2 + F_{n-1}^2 + 2F_n F_{n-1}$$

**Ejercicio 5.** Demuestra algebraica y visualmente (con la ayuda del dibujo) la igualdad

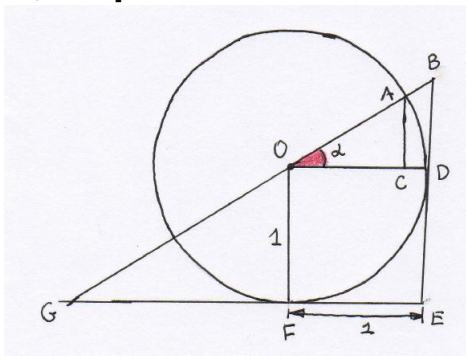
$$F_{n+1}^2 = 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2$$





## Trigonometría visual

Representa las seis funciones trigonométricas de un ángulo agudo  $\alpha$  como longitudes de segmentos en los triángulos de la figura [Romaine, 1988]



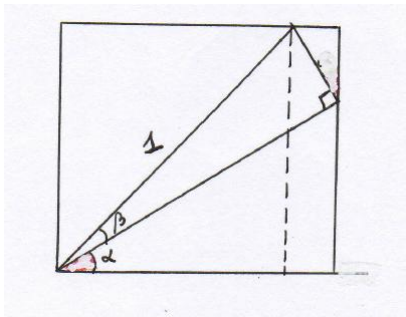
**Ejercicio 6.** Prueba que

$$(1 + \tan \alpha)^2 + (1 + \cot \alpha)^2 = (\sec \alpha + \csc \alpha)^2$$

**Ejercicio 7.** Usa la figura para probar las fórmulas siguientes:

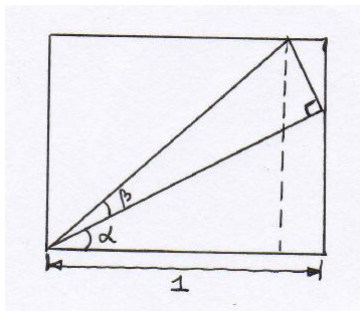
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$



**Ejercicio 8.** Usa la figura para probar las fórmulas siguientes:

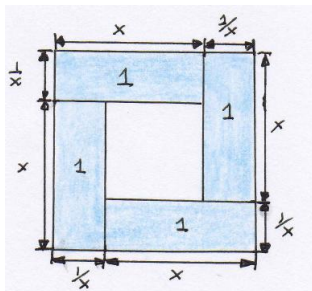
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$



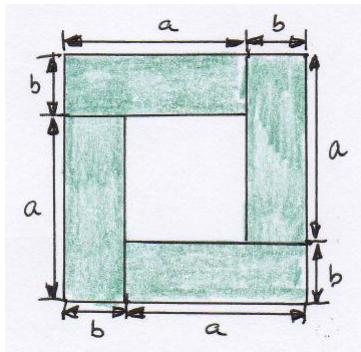
## 4.2.3. Demostraciones visuales de algunas desigualdades.

Una forma de probar desigualdades es **comparar las áreas de dos figuras**. Por ejemplo, en la figura siguiente, la suma de las áreas de los cuatro rectángulos coloreados es inferior al área del cuadrado de lado  $x + \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ . Luego

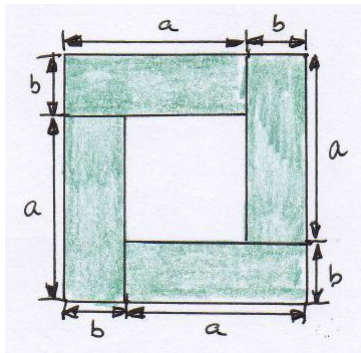
$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 4 \implies x + \frac{1}{x} \geq 2.$$



**Ejercicio 9.** La **media geométrica** de dos números  $a, b (> 0)$  es  $M_G = \sqrt{ab}$  y su **media aritmética** es  $M_A = \frac{a+b}{2}$ . ¿Qué desigualdad entre ambas permite probar la figura siguiente?



**Ejercicio 9.** La **media geométrica** de dos números  $a, b (> 0)$  es  $M_G = \sqrt{ab}$  y su **media aritmética** es  $M_A = \frac{a+b}{2}$ . ¿Qué desigualdad entre ambas permite probar la figura siguiente?



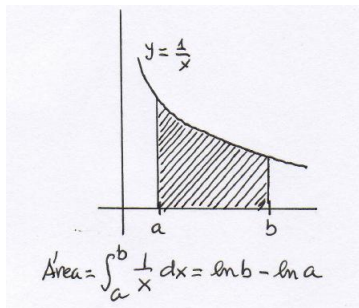
Demuestra algebraicamente la desigualdad que has encontrado visualmente.

**Ejercicio 10.** El área bajo la gráfica de la función  $y = 1/x$ , por encima del eje  $X$ , entre  $a$  y  $b$  ( $0 < a < b$ ) es

$$\int_a^b \frac{1}{x} = \ln b - \ln a.$$

Utiliza la figura de la derecha para demostrar visualmente la desigualdad de J. Napier:

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}.$$

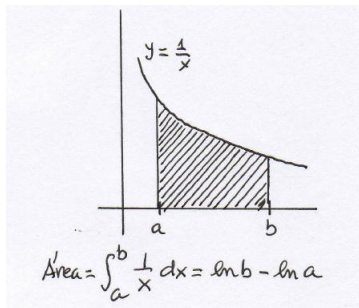


**Ejercicio 10.** El área bajo la gráfica de la función  $y = 1/x$ , por encima del eje  $X$ , entre  $a$  y  $b$  ( $0 < a < b$ ) es

$$\int_a^b \frac{1}{x} = \ln b - \ln a.$$

Utiliza la figura de la derecha para demostrar visualmente la desigualdad de J. Napier:

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}.$$

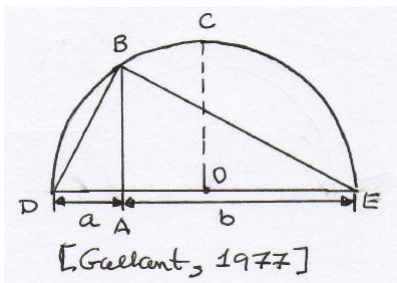


**NOTA:** Se puede usar esta desigualdad para probar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$



Otra forma de probar desigualdades visualmente es **comparar las longitudes de segmentos**. Dados  $0 < a \leq b$ , el diámetro de la semicircunferencia de la figura adjunta es  $a + b$ , por lo que  $\overline{OC} = \frac{a+b}{2}$ . Por otro lado, por el teorema de la altura  $\overline{BA} = \sqrt{ab}$ . En la figura se aprecia la desigualdad  $\overline{BA} \leq \overline{OC}$ , por lo que  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ , que es de nuevo la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética.

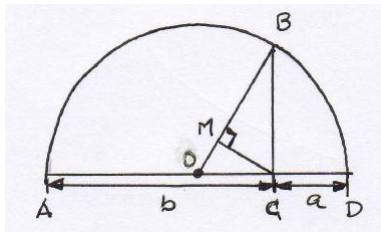


**Ejercicio 11.** Dados  $0 < a < b$  su **media armónica** es

$$M_H = \frac{2ab}{a+b}.$$

Usar la figura adjunta ([Cosmariu, 1981]) para mostrar las desigualdades  $M_H < M_G < M_A$ , es decir,

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

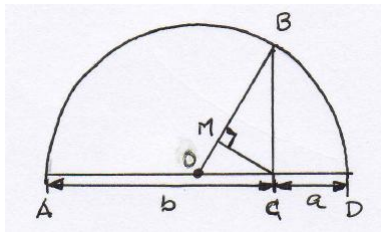


**Ejercicio 11.** Dados  
 $0 < a < b$  su **media armónica** es

$$M_H = \frac{2ab}{a+b}.$$

Usar la figura adjunta ([Cosmariu, 1981]) para mostrar las desigualdades  $M_H < M_G < M_A$ , es decir,

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$



**NOTA:** Si un conductor conduce D km a una velocidad media de a km/h y regresa D km a una velocidad media de b km/h, la velocidad media del viaje de ida y vuelta es  $\frac{2ab}{a+b} = M_H$ .

**Ejercicio 12.** Usar la figura adjunta para probar que si  $a, b > 0$ ,

$$\sqrt{a^2 + b^2} < a + b \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

