CMES.
Curso 2010-11

EJERCICIOS DEL TEMA 5.

4. Análisis matemático.

1. Usa el principio de los intervalos encajados para demostrar, de manera precisa y bien escrita, que toda función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$ está acotada en este intervalo.

2. Determina las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 4x + 9$ que pasan por el origen de coordenadas.

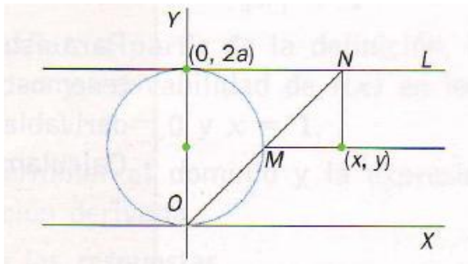
3. (a) Demuestra que la función $\operatorname{senh} x$ es inyectiva en $\mathbb{R}$ y su rango es todo $\mathbb{R}$. Su función inversa es el $\operatorname{arcsenh} x$. Dibuja la gráfica de esta función y demuestra que

$$\operatorname{arcsenh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})\,,\ \ x \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Demuestra que la función $\tanh x$ es inyectiva en $\mathbb{R}$ y su rango es $(-1, 1)$. Su función inversa es el $\operatorname{arctanh} x$. Dibuja la gráfica de esta función y demuestra que

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ \ x \in (-1, 1)\,.$$

4. Aquí tienes una curva que fue estudiada por María Gaetana Agnesi (1718-1799). A esta curva se le conoce con el nombre de *hechicera de Agnesi*.



i) Considera un circunferencia de centro $(0, a)$, con $a > 0$.

ii) Sea L la recta horizontal que pasa por $(0, 2a)$.

iii) Dibuja una recta que pasa por el origen y cualquier punto M de la circunferencia. Sea N el punto de intersección de esta recta con L.

iv) La *hechicera de Agnesi* es la curva cuyos puntos son la intersección de una recta horizontal que pasa por M y otra vertical por N.

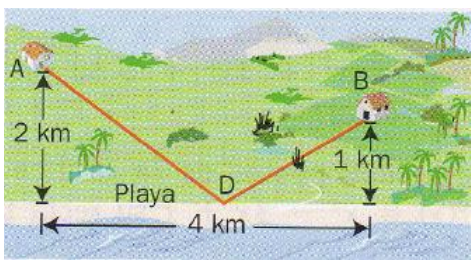
(a) Demuestra que la ecuación de la *hechicera de Agnesi* es

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}\,.$$

b) Dibuja su gráfica

5. En el libro *Nueva geometría sólida de los barriles de vino*, J. Kepler escribió: *"De todos los cilindros con la misma diagonal, el que tiene más capacidad es aquel en que la razón del diámetro de la base y la altura es $\sqrt{2}$"*. ¿Puedes mostrar que la afirmación de Kepler es correcta? (Nota: Si D es el diámetro del cilindro, éste debe estar inscrito en una esfera de radio $R = D/2$)

6. Vas desde tu casa (A) a la de un amigo (B) pasando por la playa. Si vas por el campo con velocidad constante, ¿a qué punto de la playa debes dirigirte para tardar lo menos posible? Da una respuesta analítica y una geométrica.



7. La sustitución $u = \tan(x/2)$ puede transformar cualquier integral de una función racional de senos y cosenos en una integral de una función racional. Demuestra que

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}\,, \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2}\,, \qquad dx = \frac{2}{1+u^2}du\,.$$

Calcula las siguentes integrales haciendo la sustitución $u = \tan(x/2)$:

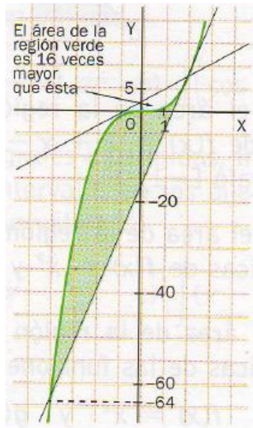
$$(a) \int \frac{1}{2+\cos x}dx \qquad (b) \int \frac{1}{2+\operatorname{sen} x}$$

8. Sea C la gráfica de la función $f(x) = x^3$ y $P = (x_0, x_0^3)$ un punto de C con $x_0 < 0$. La recta tangente a C por el punto P corta a C en otro punto Q.

(a) Halla las coordenadas de Q

(b) La recta tangente a C por el punto Q corta a C en otro punto R. Halla las coordenadas del punto R. (Te puede servir el trabajo realizado en el apartado (a))

(c) Demuestra que el área entre C y la recta tangente a C por el punto Q es 16 veces el área entre C y la recta tangente por P.



9. Con centro en cada uno de los vértices de un cuadrado de lado 1 se traza un cuarto de circunferencia como se indica en la figura.

(a) Halla el área de la región sombreada de la figura.

(b) Halla la longitud del perímetro de la región sombreada de la figura.

10. El tiempo que tarda una pelota en llegar desde el punto $A = (0,0)$ hasta el $B = (1,1)$ deslizándose por la curva $y = f(x)$ sin rozamiento está dado por

$$T = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}{\sqrt{2gf(x)}}dx\,.$$

(a) Calcula T para un camino recto entre A y B.

(b) Calcula T si la curva es una parábola entre A y B.(Puedes usar un programa de ordenador para aproximar la integral con 5 decimales)

(c) Calcula T si la curva es un trozo de circunferencia entre A y B. Puedes usar un programa de ordenador para aproximar la integral con 5 decimales)

(d) Calcula T si la curva es un trozo de cicloide, $x(t) = \frac{d}{2}(t - \operatorname{sen} t)\,, y(t) = \frac{d}{2}(1-\cos t)$, entre A y B.