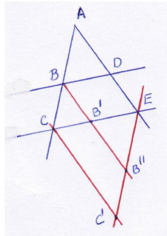
CMES.
Curso 2010-11

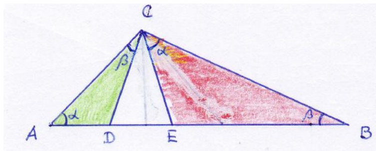
EJERCICIOS DEL TEMA 4.

4.1. El teorema de Thales y el teorema de Pitágoras.



1. Usar la figura de la derecha y el teorema de Thales para demostrar que se cumple

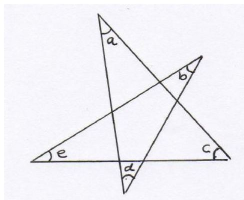
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$



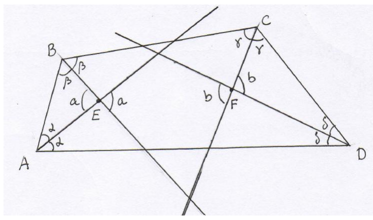
2. Demostrar la siguiente generalización de los teoremas de la altura, del cateto y de Pitágoras para un triángulo cualquiera. Con la nomenclatura de la figura:

   - Teorema de la altura generalizado: $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \times \overline{EB}$ y $\overline{CE}^2 = \overline{AD} \times \overline{EB}$
   - Teorema del cateto generalizado: $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \times \overline{AD}$ y $\overline{CB}^2 = \overline{EB} \times \overline{AB}$
   - Teorema de Pitágoras generalizado: $\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AB} \times (\overline{AD} + \overline{EB})$

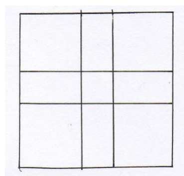
4.2. Demostraciones visuales.



3. Hallar la suma de los ángulos interiores de una estrella de cinco puntas usando un argumento visual similar al de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.



4. Considerar un cuadrilátero convexo en el que las bisectrices de sus cuatro ángulos forman un nuevo cuadrilátero. Demostrar que este nuevo cuadrilátero la suma de los ángulos interiores de vértices opuestos es 180º (en la figura $a + b = 180^o$)



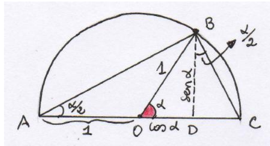
5. Utiliza la figura de la derecha para demostrar visualmente la fórmula

$$F_{n+1}^2 = 4F_{n-1}^2 + 4F_{n-1}F_{n-2} + F_{n-2}^2$$

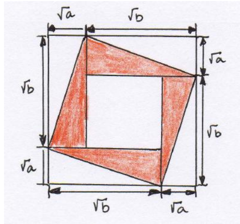
6. Demuestra algebraica y visualmente que el producto de cuatro números enteros consecutivos es una unidad menos que un cuadrado perfecto.

7. Usar la figura de la derecha para ilustrar las fórmulas de la tangente del ángulo mitad:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\,.$$



8. Usar la figura de la derecha para demostrar que la media geométrica $M_G = \sqrt{ab}$ de dos números $a, b > 0$ no supera a su media aritmética $M_A = \frac{a+b}{2}$.



9. Dados $a, b > 0$ su media armónica es $M_H = \frac{2ab}{a+b}$ y su media cuadrática $M_C = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Con la figura que hay a continuación demuestra las desigualdades:

$$M_H \le M_G \le M_A \le M_C$$