

CMES.
Curso 2010-11

EJERCICIOS DEL TEMA 3.

3.3. Autovalores y autovectores. Sistemas de evolución.

1. Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Diagonalizar la matriz A y calcular A^n .
2. Hallar los autovalores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Hallar tres autovectores de A que sean linealmente independientes.
3. Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ no pueden diagonalizarse. Sin embargo no es difícil calcular A^{100} y B^{100} . ¿Sabrías hacerlo?
4. Una población de aves se encuentra repartida entre dos humedales A y B . Se sabe que cada día un 70% de aves del humedal A se traslada a B mientras que un 50% de aves de B lo hace a A .
 - a) Describir en forma matricial la evolución de cada día al siguiente.
 - b) Si inicialmente había 120 aves en cada humedal ¿qué evolución seguirá el sistema a largo plazo?
5. La población de cierta especie de animales en un bosque está dividida en dos grupos de edad (jóvenes y adultos). La correspondiente matriz de Leslie es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
 - a) Interpreta el significado de cada uno de los elementos de la matriz anterior.
 - b) Calcula el autovalor dominante de A y un autovector asociado.
 - c) ¿Cuál es la población de individuos en cada grupo con respecto al total con el paso del tiempo?
6. Supongamos que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$ es la matriz de transición de una población de venados hembras, dividida para su estudio en jóvenes y adultas.
 - a) Demuestra que, a la larga, la población crecerá por un factor aproximado de 1.27.
 - b) Los granjeros y otras personas del área no quieren que la población crezca. Pueden controlarla permitiendo la caza de venados adultos. Si h es la proporción de adultos cazados en cada período, ¿cuál será ahora la matriz de transición?
 - c) Prueba que $h = 0.6$ es una caza demasiado intensiva, es decir, la población de venados se extinguiría.
 - d) Es posible seleccionar h de manera que la población de venados no crezca ni desaparezca. ¿Cuál sería ese valor de h ?
7. Una compañía de alquiler de coches tiene 3 sedes A , B y C . Se observa que de los clientes que alquilan el coche en A sólo el 80% lo devuelve de nuevo a A , mientras que un 10% lo devuelve en B y el otro 10% en C . De entre quienes alquilan el vehículo en B , 30% lo devolverá en A , 20% en B y 50% en C . Por último, de los que alquilan en C , 20% lo devuelve en A , 60% en B y 20% en C . ¿Qué proporción de vehículos quedará en cada sede con el paso del tiempo?