5. Análisis matemático // 5.4. Integración.

Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR
EN MATEMÁTICAS
Curso 2010-2011

5.4.1. El área de un círculo mediante aproximación por polígonos regulares.

5.4.1. El área de un círculo mediante aproximación por polígonos regulares.

El área de un círculo puede aproximarse por el área de polígonos regulares inscritos en él, cada uno de los cuales se obtiene del anterior duplicando el número de lados. Si el círculo tiene radio 1 su área es π y estamos obteniendo aproximaciones del número π.

5.4.1. El área de un círculo mediante aproximación por polígonos regulares.

El área de un círculo puede aproximarse por el área de polígonos regulares inscritos en él, cada uno de los cuales se obtiene del anterior duplicando el número de lados. Si el círculo tiene radio 1 su área es π y estamos obteniendo aproximaciones del número π.

El área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 1 es :

5.4.1. El área de un círculo mediante aproximación por polígonos regulares.

El área de un círculo puede aproximarse por el área de polígonos regulares inscritos en él, cada uno de los cuales se obtiene del anterior duplicando el número de lados. Si el círculo tiene radio 1 su área es π y estamos obteniendo aproximaciones del número π.

El área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 1 es : $A_4 = 2$

5.4.1. El área de un círculo mediante aproximación por polígonos regulares.

El área de un círculo puede aproximarse por el área de polígonos regulares inscritos en él, cada uno de los cuales se obtiene del anterior duplicando el número de lados. Si el círculo tiene radio 1 su área es π y estamos obteniendo aproximaciones del número π.

El área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 1 es : $A_4 = 2$

El área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 1 es :

5.4.1. El área de un círculo mediante aproximación por polígonos regulares.

El área de un círculo puede aproximarse por el área de polígonos regulares inscritos en él, cada uno de los cuales se obtiene del anterior duplicando el número de lados. Si el círculo tiene radio 1 su área es π y estamos obteniendo aproximaciones del número π.

El área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 1 es : $A_4 = 2$

El área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 1 es : $A_8 = 2\sqrt{2} \approx 2'828428.$

5.4.1. El área de un círculo mediante aproximación por polígonos regulares.

El área de un círculo puede aproximarse por el área de polígonos regulares inscritos en él, cada uno de los cuales se obtiene del anterior duplicando el número de lados. Si el círculo tiene radio 1 su área es π y estamos obteniendo aproximaciones del número π.

El área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 1 es : $A_4 = 2$

El área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 1 es : $A_8 = 2\sqrt{2} \approx 2'828428.$

Ejercicio 1. Sea ℓ_n el lado de un polígono regular de n lados inscrito en un circunferencia de radio 1. Demuestra que ℓ_{2n} satisface

$$\ell_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}}\,.$$

Ejercicio 2. Si a_n es la apotema de un polígono regular de n lados , demuestra que

$$A_{2^n} = 2^{n-1}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}\, a_{2^n}$$

donde en esta fórmula se han tomado $n-1$ raices cuadradas.

Ejercicio 2. Si a_n es la apotema de un polígono regular de n lados , demuestra que

$$A_{2^n} = 2^{n-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\, a_{2^n}$$

donde en esta fórmula se han tomado $n-1$ raices cuadradas.

Como el límite de las apotemas cuando n tiende a infinito es 1 (el radio del círculo) se tiene

$$\pi = \lim_{n\to\infty} A_{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^{n-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\,.$$

Ejercicio 2. Si a_n es la apotema de un polígono regular de n lados , demuestra que

$$A_{2^n} = 2^{n-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\, a_{2^n}$$

donde en esta fórmula se han tomado $n-1$ raices cuadradas.

Como el límite de las apotemas cuando n tiende a infinito es 1 (el radio del círculo) se tiene

$$\pi = \lim_{n\to\infty} A_{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^{n-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\,.$$

Con 16 lados:

Ejercicio 2. Si a_n es la apotema de un polígono regular de n lados , demuestra que

$$A_{2^n} = 2^{n-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\, a_{2^n}$$

donde en esta fórmula se han tomado $n-1$ raices cuadradas.

Como el límite de las apotemas cuando n tiende a infinito es 1 (el radio del círculo) se tiene

$$\pi = \lim_{n\to\infty} A_{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^{n-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\,.$$

Con 16 lados: $A_{2^4} \approx 3'12144516$

Ejercicio 2. Si a_n es la apotema de un polígono regular de n lados , demuestra que

$$A_{2^n} = 2^{n-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\, a_{2^n}$$

donde en esta fórmula se han tomado $n-1$ raices cuadradas.

Como el límite de las apotemas cuando n tiende a infinito es 1 (el radio del círculo) se tiene

$$\pi = \lim_{n\to\infty} A_{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^{n-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\,.$$

Con 16 lados: $A_{2^4} \approx 3'12144516$
Con 2048 lados:

Ejercicio 2. Si a_n es la apotema de un polígono regular de n lados , demuestra que

$$A_{2^n} = 2^{n-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\, a_{2^n}$$

donde en esta fórmula se han tomado $n-1$ raices cuadradas.

Como el límite de las apotemas cuando n tiende a infinito es 1 (el radio del círculo) se tiene

$$\pi = \lim_{n\to\infty} A_{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^{n-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\,.$$

Con 16 lados: $A_{2^4} \approx 3'12144516$
Con 2048 lados: $A_{2^{11}} \approx 3'141694464$

5.4.2. La integral como medida de áreas, longitudes y volúmenes.

5.4.2. La integral como medida de áreas, longitudes y volúmenes.

La definición de integral se hace con un procedimiento de aproximación similar al usado para calcular el área de un círculo, pero sustituyendo poligonos por rectángulos.

5.4.2. La integral como medida de áreas, longitudes y volúmenes.

La definición de integral se hace con un procedimiento de aproximación similar al usado para calcular el área de un círculo, pero sustituyendo poligonos por rectángulos.

Dada un función f acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$, para una partición $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$, se definen las sumas inferiores y las sumas superiores de Riemann mediante:

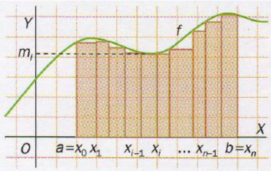
$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_1 - x_{i-1}) \quad \text{y} \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_1 - x_{i-1})\,.$$

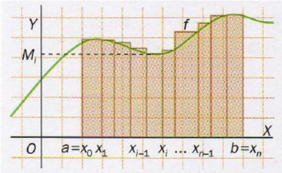
5.4.2. La integral como medida de áreas, longitudes y volúmenes.

La definición de integral se hace con un procedimiento de aproximación similar al usado para calcular el área de un círculo, pero sustituyendo poligonos por rectángulos.

Dada un función f acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$, para una partición $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$, se definen las sumas inferiores y las sumas superiores de Riemann mediante:

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_1 - x_{i-1}) \quad \text{y} \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_1 - x_{i-1})\,.$$





Definición de integral

Se dice que una función acotada es integrable en $[a, b]$ si se cumple que $\sup_{P\in\mathfrak{P}} s(f, P) = \inf_{P\in\mathfrak{P}} S(f, P)$ y este número común se escribe $\int_a^b f(x)dx$.

Definición de integral

Se dice que una función acotada es integrable en $[a, b]$ si se cumple que $\sup_{P\in\mathfrak{P}} s(f, P) = \inf_{P\in\mathfrak{P}} S(f, P)$ y este número común se escribe $\int_a^b f(x)dx$.

NOTA: Si f es integrable en $[a, b]$ se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \, ,$$

para cualquiera que sea la elección de $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Definición de integral

Se dice que una función acotada es integrable en $[a, b]$ si se cumple que $\sup_{P\in\mathfrak{P}} s(f, P) = \inf_{P\in\mathfrak{P}} S(f, P)$ y este número común se escribe $\int_a^b f(x)dx$.

NOTA: Si f es integrable en $[a, b]$ se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) ,$$

para cualquiera que sea la elección de $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

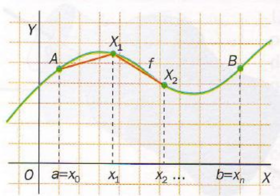
Teorema del valor medio para integrales

Si f es continua en $[a, b]$, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a) .$$

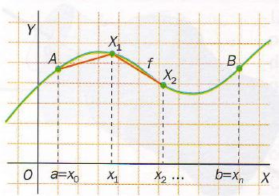
LONGITUD DE UNA CURVA.

La longitud de una curva puede aproximarse por la longitud de una linea quebrada que une los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$.



LONGITUD DE UNA CURVA.

La longitud de una curva puede aproximarse por la longitud de una linea quebrada que une los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$. La longitud de esta línea quebrada es:

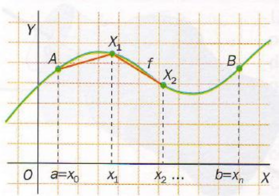


$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2},$$

con $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, por el Teorema del valor medio.

LONGITUD DE UNA CURVA.

La longitud de una curva puede aproximarse por la longitud de una linea quebrada que une los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1})$ y $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$. La longitud de esta línea quebrada es:



$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,,$$

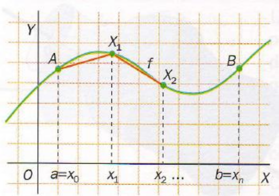
con $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, por el Teorema del valor medio.

LONGITUD DE UNA CURVA DERIVABLE

$$L(f : [a, b]) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx\,.$$

LONGITUD DE UNA CURVA.

La longitud de una curva puede aproximarse por la longitud de una linea quebrada que une los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1})$ y $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$. La longitud de esta línea quebrada es:



$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \,,$$

con $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, por el Teorema del valor medio.

LONGITUD DE UNA CURVA DERIVABLE

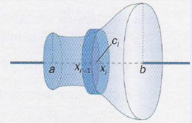
$$L(f : [a, b]) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \,.$$

Ejercicio 3. Las ecuaciones paramétricas de una cicloide son $x(t) = R(t - \operatorname{sen} t)$, $y(t) = R(1 - \cos t)$. Halla la longitud del arco de cicloide entre los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (2\pi R, 0)$.

VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN.

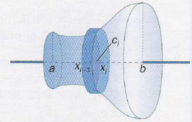
Por el principio de Cavalieri

$$V(f : [a,b]) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \,.$$



VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN.

Por el principio de Cavalieri



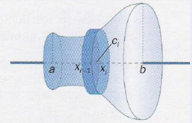
$$V(f : [a,b]) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \,.$$

SUPERFICIE LATERAL DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN.

$$SL(f : [a,b]) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \,.$$

VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN.

Por el principio de Cavalieri



$$V(f : [a, b]) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \, .$$

SUPERFICIE LATERAL DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN.

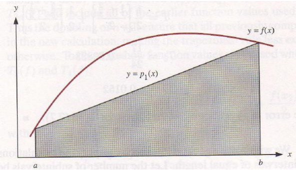
$$SL(f : [a, b]) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \, .$$

Ejercicio 4. Prueba que el volumen del sólido de revolución generado por la gráfica de $y = 1/x$ en $[1, \infty)$ es finito, pero su superficie lateral no es finita.

5.4.3. Cálculo aproximado de la integral.

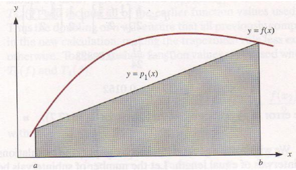
La regla del trapecio.

Si $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ no puede calcularse mediante primitivas o con reglas de integración, una solución es buscar una aproximación. Con la aproximacion lineal de la figura se obtiene la regla del **trapecio**: $T_1(f) = (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}$.



5.4.3. Cálculo aproximado de la integral.

La regla del trapecio.



Si $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ no puede calcularse mediante primitivas o con reglas de integración, una solución es buscar una aproximación. Con la aproximacion lineal de la figura se obtiene la regla del **trapecio**: $T_1(f) = (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}$.

Si el intervalo $[a,b]$ se divide en n subintervalos iguales cada uno de longitud $h = (b-a)/n$ se consigue la regla del **trapecio**:

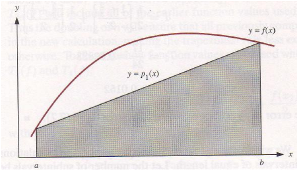
$$T_n(f) = h[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)]$$

con $x_j = a + jh, j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

5.4.3. Cálculo aproximado de la integral.

La regla del trapecio.

Si $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ no puede calcularse mediante primitivas o con reglas de integración, una solución es buscar una aproximación. Con la aproximacion lineal de la figura se obtiene la regla del **trapecio**: $T_1(f) = (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}$.



Si el intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos iguales cada uno de longitud $h = (b-a)/n$ se consigue la regla del **trapecio**:

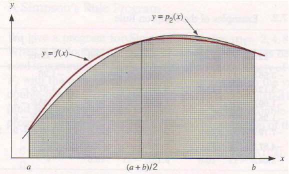
$$T_n(f) = h[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)]$$

con $x_j = a + jh, j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Si $f \in C^2([a, b])$, $|I(f) - T_n(f)| = \frac{h^2(b-a)}{2} f''(c_n)$ con $c_n \in [a, b]$.

La regla de Simpson (Thomas Simpson, 1710-1761).

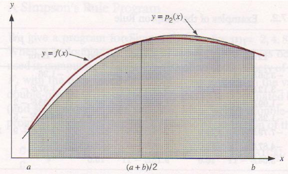
Con una aproximacion cuadrática como en la figura se obtiene la regla del **Simpson**:



$$S_2(f) = \frac{(b-a)}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]\,.$$

La regla de Simpson (Thomas Simpson, 1710-1761).

Con una aproximacion cuadrática como en la figura se obtiene la regla del **Simpson**:



$$S_2(f) = \frac{(b-a)}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]\,.$$

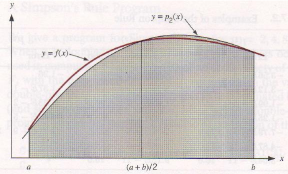
Si el intervalo $[a, b]$ se divide en $2n$ subintervalos iguales cada uno de longitud $h = (b-a)/2n$ se consigue la regla de **Simpson**:

$$S_{2n}(f) = \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+4f(x_{2n-1})+f(x_n))]$$

con $x_j = a + jh, j = 0, 1, 2, \ldots, 2n\,.$

La regla de Simpson (Thomas Simpson, 1710-1761).

Con una aproximacion cuadrática como en la figura se obtiene la regla del **Simpson**:



$$S_2(f) = \frac{(b-a)}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]\,.$$

Si el intervalo $[a, b]$ se divide en $2n$ subintervalos iguales cada uno de longitud $h = (b-a)/2n$ se consigue la regla de **Simpson**:

$$S_{2n}(f) = \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+4f(x_{2n-1})+f(x_n))]$$

con $x_j = a + jh, j = 0, 1, 2, \ldots, 2n\,.$

ERROR

Si $f \in C^4([a, b])$, $|I(f) - S_{2n}(f)| = \frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(c_n)$ con $c_n \in [a, b]$.

5.4.4. El descubrimiento de Newton y Leibniz: el teorema fundamental del cálculo.

5.4.4. El descubrimiento de Newton y Leibniz: el teorema fundamental del cálculo.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si f es continua en $[a, b]$, la función integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en (a, b) y su derivada es $F'(x) = f(x)$.

5.4.4. El descubrimiento de Newton y Leibniz: el teorema fundamental del cálculo.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si f es continua en $[a, b]$, la función integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en (a, b) y su derivada es $F'(x) = f(x)$.

REGLA DE BARROW

Si f es continua en $[a, b]$ y $G(x)$ es una primitiva de f (es decir $G'(x) = f(x)$) se tiene $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

5.4.4. El descubrimiento de Newton y Leibniz: el teorema fundamental del cálculo.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si f es continua en $[a, b]$, la función integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en (a, b) y su derivada es $F'(x) = f(x)$.

REGLA DE BARROW

Si f es continua en $[a, b]$ y $G(x)$ es una primitiva de f (es decir $G'(x) = f(x)$) se tiene $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

CAMBIO DE VARIABLE EN LA INTEGRAL

Si f y g son derivables, a partir de la regla de la cadena se demuestra que $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$, lo que se interpreta como la sustitución $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$.

Integración por partes

Si f y g son derivables, a partir de la derivada de un producto se demuestra que

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx\,.$$

Integración por partes

Si f y g son derivables, a partir de la derivada de un producto se demuestra que

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx\,.$$

Ejercicio 5. Calcula $I = \int_0^1 x\ln(1+x^2)dx$.

Integración por partes

Si f y g son derivables, a partir de la derivada de un producto se demuestra que

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx\,.$$

Ejercicio 5. Calcula $I = \int_0^1 x\ln(1+x^2)dx$.

Ejercicio 6. Dada la función $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$ estudia las asíntotas y la monotonía de f. Dibuja aproximadamente la gráfica de f. (Oposición Castilla y León, 2002)