5. ANÁLISIS MATEMÁTICO // 5.3. OPTIMIZACIÓN.

Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR EN MATEMÁTICAS
Curso 2010-2011

5.3.1. Existencia de valores óptimos.

5.3.1. Existencia de valores óptimos.

Optimizar (RAE): *Buscar la mejor manera de realizar una actividad.*

5.3.1. Existencia de valores óptimos.

Optimizar (RAE): *Buscar la mejor manera de realizar una actividad.*

1. Si la actividad puede modelizarse con una función de una o varias variables, optimizar requiere hallar el menor o el mayor valor de la función para los valores admisibles de las variables.

5.3.1. Existencia de valores óptimos.

Optimizar (RAE): *Buscar la mejor manera de realizar una actividad.*

1. Si la actividad puede modelizarse con una función de una o varias variables, optimizar requiere hallar el menor o el mayor valor de la función para los valores admisibles de las variables.

2. No todos los problemas de optimización tienen solución: maximizar la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en el intervalo $[0, 1)$ no tiene solución porque $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \infty$.

5.3.1. Existencia de valores óptimos.

Optimizar (RAE): *Buscar la mejor manera de realizar una actividad.*

1. Si la actividad puede modelizarse con una función de una o varias variables, optimizar requiere hallar el menor o el mayor valor de la función para los valores admisibles de las variables.

2. No todos los problemas de optimización tienen solución: maximizar la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en el intervalo $[0, 1)$ no tiene solución porque $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$.

Teorema de Weierstrass

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ($[a, b]$ es un intervalo cerrado y acotado) y f es continua, existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo $x \in [a, b]$ (es decir, $f(x_1)$ es el valor mínimo de f y $f(x_2)$ es el valor máximo de f en $[a, b]$).

Demuestra el siguiente corolario del Teorema de Weierstrass

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (es decir, $f(x_0)$ es el valor mínimo de f en $\mathbb{R}$).

Demuestra el siguiente corolario del Teorema de Weierstrass

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (es decir, $f(x_0)$ es el valor mínimo de f en $\mathbb{R}$).

Para funciones de variables variables se tiene

Teorema de Weierstrass

Sea $A \in \mathbb{R}^n$ compacto (cerrado y acotado) y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en A. Existen $x_1, x_2 \in A$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo $x \in [a, b]$ (es decir, $f(x_1)$ es el valor mínimo de f y $f(x_2)$ es el valor máximo de f en A).

Demuestra el siguiente corolario del Teorema de Weierstrass

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (es decir, $f(x_0)$ es el valor mínimo de f en $\mathbb{R}$).

Para funciones de variables variables se tiene

Teorema de Weierstrass

Sea $A \in \mathbb{R}^n$ compacto (cerrado y acotado) y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en A. Existen $x_1, x_2 \in A$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo $x \in [a, b]$ (es decir, $f(x_1)$ es el valor mínimo de f y $f(x_2)$ es el valor máximo de f en A).

En algunos casos el máximo o mínimo se alcanza en un punto crítico:

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cóncava hacia arriba (hacia abajo) y $f \in C^1([a, b])$. Si existe $c \in [a, b]$ tal que $f'(c) = 0$, f alcanza en c su mínimo (máximo) global en $[a, b]$.

5.3.2. Un método para optimizar.

5.3.2. Un método para optimizar.

1. Formulación del problema: Hallar la fórmula que rige el fenómeno planteado. Se debe conseguir una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ y describir de manera precisa el conjunto A.

5.3.2. Un método para optimizar.

1. Formulación del problema: Hallar la fórmula que rige el fenómeno planteado. Se debe conseguir una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ y describir de manera precisa el conjunto A.

2. Hallar los extremos locales: En el conjunto en el que la función f tenga derivada o existan sus derivadas parciales, hallar los extremos locales resolviendo el sistema (o una ecuación si $n = 1$) $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0\,, j = 1, 2, \ldots, n\,.$

1. Formulación del problema: Hallar la fórmula que rige el fenómeno planteado. Se debe conseguir una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ y describir de manera precisa el conjunto A.

2. Hallar los extremos locales: En el conjunto en el que la función f tenga derivada o existan sus derivadas parciales, hallar los extremos locales resolviendo el sistema (o una ecuación si $n = 1$) $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0\,, j = 1, 2, \ldots, n\,.$

3. Discusión y solución: Mostrar que la función tiene un valor óptimo usando el Teorema de Weierstrass o alguna de sus variantes. Hallarlo entre los valores de f en los extremos locales, en los puntos en los que no sea derivable y en los puntos de su frontera (puede requerir opitimizar f sobre su frontera). De todos estos el que produzca el mayor valor es el máximo (si existe) y el que produzca el menor valor es el mínimo (si existe).

Ejercicio 1. De todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio R, hallar el de mayor área.

Ejercicio 1. De todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio R, hallar el de mayor área.

Ejercicio 2. Queremos construir una lata cilíndrica para comercializar un producto. La soldadura de la hojalata se ha puesto muy cara. Queremos que la lata tenga un volumen de 1 litro con el mínimo gasto de soldadura posible ¿Que dimensiones debe tener la lata?

Ejercicio 1. De todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio R, hallar el de mayor área.

Ejercicio 2. Queremos construir una lata cilíndrica para comercializar un producto. La soldadura de la hojalata se ha puesto muy cara. Queremos que la lata tenga un volumen de 1 litro con el mínimo gasto de soldadura posible ¿Que dimensiones debe tener la lata?

Ejercicio 3. De entre todos los triángulos de igual perímetro, describir el que tiene mayor área.

Ejercicio 1. De todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio R, hallar el de mayor área.

Ejercicio 2. Queremos construir una lata cilíndrica para comercializar un producto. La soldadura de la hojalata se ha puesto muy cara. Queremos que la lata tenga un volumen de 1 litro con el mínimo gasto de soldadura posible ¿Que dimensiones debe tener la lata?

Ejercicio 3. De entre todos los triángulos de igual perímetro, describir el que tiene mayor área.

Ejercicio 4. Hallar las coordenadas del punto $P = (x, y)$ cuya suma de los cuadrados de las distancias a tres puntos fijos $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ y $C = (c_1, c_2)$ sea mínima.

1. EL PROBLEMA DE FERMAT.

Tres pueblos del desierto de Arizona, Hickory (H), Nickory (N) y Mickory (M), situados formando un triángulo acutángulo, han decidido construir una escuela de manera que el combustible que gasten los autobuses para acercar a los estudiantes diariamente hasta la escuela sea el menor posible. Demuestra que el punto $P = (x, y)$ solución de este problema debe ser tal que los segmentos HP, NP y MP formen en P ángulos de 120º.

1. EL PROBLEMA DE FERMAT.

Tres pueblos del desierto de Arizona, Hickory (H), Nickory (N) y Mickory (M), situados formando un triángulo acutángulo, han decidido construir una escuela de manera que el combustible que gasten los autobuses para acercar a los estudiantes diariamente hasta la escuela sea el menor posible. Demuestra que el punto $P = (x, y)$ solución de este problema debe ser tal que los segmentos HP, NP y MP formen en P ángulos de 120º.

NOTA: El primer trabajo publicado sobre optimización, *Acerca de valores máximos y mínimos* de Viviani (1659), trataba este problema. También Torricelli y Cavalieri, estudiantes, al igual que Viviani, de Galileo, trataron este problema.

2. EL PROBLEMA DE DIDO O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO.

De todas las curvas cerradas planas de una longitud dada, describir la que encierra mayor área.

Ejercicio 5. Demostrar que la curva que encierre mayor área debe encerrar una figura convexa.

2. EL PROBLEMA DE DIDO O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO.

De todas las curvas cerradas planas de una longitud dada, describir la que encierra mayor área.

Ejercicio 5. Demostrar que la curva que encierre mayor área debe encerrar una figura convexa.

Ejercicio 6. De un triángulo equilátero, un cuadrado, un hexágono regular y un círculo, todos ellos de perímetro fijo p, ¿cuál es el que encierra mayor área?

2. EL PROBLEMA DE DIDO O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO.

De todas las curvas cerradas planas de una longitud dada, describir la que encierra mayor área.

Ejercicio 5. Demostrar que la curva que encierre mayor área debe encerrar una figura convexa.

Ejercicio 6. De un triángulo equilátero, un cuadrado, un hexágono regular y un círculo, todos ellos de perímetro fijo p, ¿cuál es el que encierra mayor área?

En el ejercicio 3 hemos resuelto el **problema de Dido para triángulos**: de todos los triángulos de perímetro dado el que tiene mayor área es el equilátero.

2. EL PROBLEMA DE DIDO O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO.

De todas las curvas cerradas planas de una longitud dada, describir la que encierra mayor área.

Ejercicio 5. Demostrar que la curva que encierre mayor área debe encerrar una figura convexa.

Ejercicio 6. De un triángulo equilátero, un cuadrado, un hexágono regular y un círculo, todos ellos de perímetro fijo p, ¿cuál es el que encierra mayor área?

En el ejercicio 3 hemos resuelto el **problema de Dido para triángulos**: de todos los triángulos de perímetro dado el que tiene mayor área es el equilátero.

Ejercicio 7. De todos los triángulos con uno de sus lados fijo, y de perímetro dado, prueba que el de mayor área es el que tiene los otros dos lados iguales (es decir, el triángulo es isósceles).

2.1. El problema de Dido para cuadriláteros.

Ejercicio 8. El cuadrilátero de perímetro fijo y de mayor área debe tener todos sus lados iguales y debe ser un cuadrado.

2.1. El problema de Dido para cuadriláteros.

Ejercicio 8. El cuadrilátero de perímetro fijo y de mayor área debe tener todos sus lados iguales y debe ser un cuadrado.

2.2. El problema de Dido para un polígono de n lados.

Al igual que en el ejercicio 8, puede demostrarse que de todos los polígonos de n lados con perímetro fijo, el de mayor área debe tener todos sus lados iguales.

Resulta más difícil probar que de todos ellos el de mayor área es el polígono regular (ver V.M. Tickhomirov, *Stories about maxima and minima*, Mathematical World, Vol. 1, AMS and MAA, (1990).

2.3. El problema de Dido para una curva regular cerrada

COCIENTE ISOPERIMÉTRICO

Dada una curva cerrada de perímetro p que encierra área A se llama cociente isoperimétrico al numero $CI = 4\pi A/p^2$.

2.3. El problema de Dido para una curva regular cerrada

COCIENTE ISOPERIMÉTRICO

Dada una curva cerrada de perímetro p que encierra área A se llama cociente isoperimétrico al numero $CI = 4\pi A/p^2$.

Ejercicio 9. Demuestra que el cociente isoperimétrico de una circunferencia es 1 y que el cociente isoperimétrico de un polígno regular de n lados es $\pi/(n\tan(\pi/n))$.

2.3. El problema de Dido para una curva regular cerrada

COCIENTE ISOPERIMÉTRICO

Dada una curva cerrada de perímetro p que encierra área A se llama cociente isoperimétrico al numero $CI = 4\pi A/p^2$.

Ejercicio 9. Demuestra que el cociente isoperimétrico de una circunferencia es 1 y que el cociente isoperimétrico de un polígno regular de n lados es $\pi/(n\tan(\pi/n))$.

CURVA CERRADA REGULAR

Una curva cerrada de perímetro p^* y área A^* se dice regular si para todo $\epsilon > 0$ existe un polígono de n lados (n depende de ϵ) de perímetro p_n y área A_n tal que $0 \leq p_n - p^* < \epsilon$ y $0 \leq A^* - A < \epsilon$.

2.3. El problema de Dido para una curva regular cerrada

COCIENTE ISOPERIMÉTRICO

Dada una curva cerrada de perímetro p que encierra área A se llama cociente isoperimétrico al numero $CI = 4\pi A/p^2$.

Ejercicio 9. Demuestra que el cociente isoperimétrico de una circunferencia es 1 y que el cociente isoperimétrico de un polígno regular de n lados es $\pi/(n\tan(\pi/n))$.

CURVA CERRADA REGULAR

Una curva cerrada de perímetro p^* y área A^* se dice regular si para todo $\epsilon > 0$ existe un polígono de n lados (n depende de ϵ) de perímetro p_n y área A_n tal que $0 \leq p_n - p^* < \epsilon$ y $0 \leq A^* - A < \epsilon$.

Ejercicio 10. De todas las curvas regulares de perímetro fijo la que encierra mayor área es la circunferencia.