

5. ANÁLISIS MATEMÁTICO // 5.2. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO Y APLICACIONES.

Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR
EN MATEMÁTICAS
Curso 2010-2011

5.2.1. El problema de la tangente. Derivada.

5.2.1. El problema de la tangente. Derivada.

★ Pierre de Fermat tenía una idea correcta de recta tangente a una curva en un punto P : “es la posición límite de las secantes PQ cuando Q se acerca a P sin abandonar la curva”.

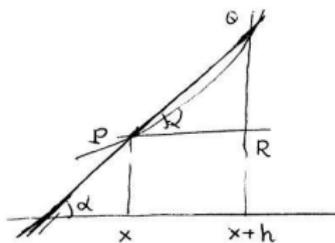
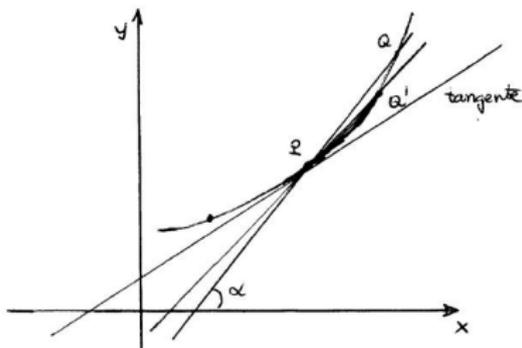
★ La recta que pasa por los puntos $P = (x, f(x))$ y $Q = (x + h, f(x + h))$ tiene como pendiente la expresión

$$\tan \alpha = \frac{|QR|}{|PR|} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

La posición límite se alcanza cuando h tiende a cero:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

y se llama **derivada** de la función f en el punto x .



Ejercicio 1. Usar la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f'(x) = nx^{n-1}$.

Ejercicio 1. Usar la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f'(x) = nx^{n-1}$.

Ejercicio 2. Usar la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = \text{sen } x$ se tiene que $f'(x) = \text{cos } x$.

Ejercicio 1. Usar la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f'(x) = nx^{n-1}$.

Ejercicio 2. Usar la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = \text{sen } x$ se tiene que $f'(x) = \cos x$.

Ejercicio 3. Demostrar que la función $f(x) = |x|$ no es derivable en el punto $x = 0$.

Ejercicio 1. Usar la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f'(x) = nx^{n-1}$.

Ejercicio 2. Usar la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = \operatorname{sen} x$ se tiene que $f'(x) = \cos x$.

Ejercicio 3. Demostrar que la función $f(x) = |x|$ no es derivable en el punto $x = 0$.

Ejercicio 4. Hallar el valor de k para que la función continua $f(x) = kx^2$ si $x \leq 1$ y $f(x) = x + k - 1$ si $x > 1$, tenga derivada en $x = 1$.

Ejercicio 1. Usar la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f'(x) = nx^{n-1}$.

Ejercicio 2. Usar la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = \text{sen } x$ se tiene que $f'(x) = \cos x$.

Ejercicio 3. Demostrar que la función $f(x) = |x|$ no es derivable en el punto $x = 0$.

Ejercicio 4. Hallar el valor de k para que la función continua $f(x) = kx^2$ si $x \leq 1$ y $f(x) = x + k - 1$ si $x > 1$, tenga derivada en $x = 1$.

NOTA: La derivada de una función $s = f(t)$ en un punto coincide con la velocidad instantánea de un objeto cuya distancia recorrida en función del tiempo está dada por la función f .

REGLAS DE DERIVACIÓN

DERIVADA DE UNA SUMA

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

REGLAS DE DERIVACIÓN

DERIVADA DE UNA SUMA

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

DERIVADA DE UN PRODUCTO

$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. En particular, si c es una constante $(cf)'(x) = cf'(x)$.

REGLAS DE DERIVACIÓN

DERIVADA DE UNA SUMA

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

DERIVADA DE UN PRODUCTO

$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. En particular, si c es una constante $(cf)'(x) = cf'(x)$.

DERIVADA DE UN COCIENTE

Si $g(x) \neq 0$ se tiene $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$.

REGLAS DE DERIVACIÓN

DERIVADA DE UNA SUMA

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

DERIVADA DE UN PRODUCTO

$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. En particular, si c es una constante $(cf)'(x) = cf'(x)$.

DERIVADA DE UN COCIENTE

Si $g(x) \neq 0$ se tiene $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$.

REGLA DE LA CADENA

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

REGLAS DE DERIVACIÓN

DERIVADA DE UNA SUMA

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

DERIVADA DE UN PRODUCTO

$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. En particular, si c es una constante $(cf)'(x) = cf'(x)$.

DERIVADA DE UN COCIENTE

Si $g(x) \neq 0$ se tiene $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$.

REGLA DE LA CADENA

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Si f^{-1} existe y $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ se tiene $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.



Derivada de funciones elementales

Función	Derivada
$x^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$n \cdot x^{n-1}$
$x^{-n}, n = 1, 2, 3, \dots$	$(-n) \cdot x^{-n-1}, x \neq 0$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, n = 2, 3, 4, \dots$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}, x \neq 0$
$x^a, a \in \mathbb{R}$	$a \cdot x^{a-1}, x > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}, x > 0$
$\log_a x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}, x > 0$
e^x	e^x
a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
$\text{sen } x$	$\text{cos } x$
$\text{cos } x$	$-\text{sen } x$
$\text{tan } x$	$\frac{1}{\text{cos } x^2} = \text{sec}^2 x, \text{cos } x \neq 0$
$\text{arcsen } x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$
$\text{arccos } x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$
$\text{arctan } x$	$\frac{1}{1+x^2}$



Derivada de funciones compuestas

Función	Derivada
$f(x)^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
$f(x)^{-n}, n = 1, 2, 3, \dots$	$(-n) \cdot f(x)^{-n-1} \cdot f'(x), f(x) \neq 0$
$\sqrt[n]{f(x)}, n = 2, 3, 4, \dots$	$\frac{1}{n} (f(x))^{\frac{1}{n}-1} f'(x) \quad f(x) \neq 0$
$f(x)^a, a \in \mathbb{R}$	$a \cdot f(x)^{a-1} \cdot f'(x) \quad f(x) > 0$
$\ln f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)} \quad f(x) > 0$
$\log_a f(x), a > 0, a \neq 1$	$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \quad f(x) > 0$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$a^{f(x)}$	$(\ln a) \cdot a^{f(x)} \cdot f'(x)$
$\text{sen } f(x)$	$[\cos f(x)] \cdot f'(x)$
$\text{cos } f(x)$	$[-\text{sen } f(x)] \cdot f'(x)$
$\text{tan } f(x)$	$\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = [\sec^2 f(x)] f'(x), \cos f(x) \neq 0$
$\text{arcsen } f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1 - (f(x))^2}} \quad -1 < f(x) < 1$
$\text{arccos } f(x)$	$\frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} \quad -1 < f(x) < 1$
$\text{arctan } f(x)$	$\frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}$



Ejercicio 5. Calcular la derivada de la función $f(x) = x^x$.

Ejercicio 5. Calcular la derivada de la función $f(x) = x^x$.

Ejercicio 6. El coseno y el seno hiperbólico se definen por las fórmulas $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ y $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Sus funciones inversas reciben el nombre de arcocoseno y arcoseno hiperbólico (arccosh y arcsenh). Calcular las derivadas de $y = \operatorname{arccosh} x$ y de $y = \operatorname{arcsenh} x$.

Ejercicio 5. Calcular la derivada de la función $f(x) = x^x$.

Ejercicio 6. El coseno y el seno hiperbólico se definen por las fórmulas $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ y $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Sus funciones inversas reciben el nombre de arcocoseno y arcoseno hiperbólico (arccosh y arcsenh). Calcular las derivadas de $y = \operatorname{arccosh} x$ y de $y = \operatorname{arcsenh} x$.

Ejercicio 7. Para anestesiar a una persona se necesita 20mg de anestésico por cada kilogramo de peso. El anestésico se elimina de la circulación sanguínea con una rapidez proporcional a la cantidad presente. Se sabe que tarda 2 horas en reducirse a la mitad. Calcular aproximadamente la dosis necesaria para mantener anestesiada a una persona de 60kg durante 1 hora.

MÉTODO DE NEWTON PARA RESOLVER $f(x) = 0$

Supongamos que f es una función derivable. Comenzando con un valor $x_0 \in \mathbb{R}$, se forma la sucesión $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ mediante la fórmula de recurrencia

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$

siempre que $f'(x_n) \neq 0$. Si la sucesión $\{x_n\}$ tiene límite α y $f'(\alpha) \neq 0$, el número real α es una solución de la ecuación $f(x) = 0$.

MÉTODO DE NEWTON PARA RESOLVER $f(x) = 0$

Supongamos que f es una función derivable. Comenzando con un valor $x_0 \in \mathbb{R}$, se forma la sucesión $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ mediante la fórmula de recurrencia

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$

siempre que $f'(x_n) \neq 0$. Si la sucesión $\{x_n\}$ tiene límite α y $f'(\alpha) \neq 0$, el número real α es una solución de la ecuación $f(x) = 0$.

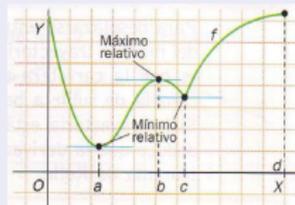
Ejercicio 8. Hallar una solución aproximada de $x^6 - x - 1 = 0$ comenzando con $x_0 = 1,5$ y calculando los seis primeros términos de la sucesión de los iterados según el método de Newton (usar $x_n - x_{n-1}$ como medida del error).

5.2.2. Máximos y mínimos locales. Puntos de inflexión

5.2.2. Máximos y mínimos locales. Puntos de inflexión

MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES

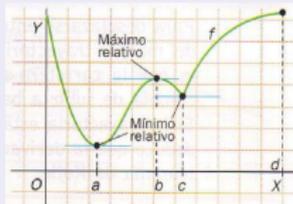
Una función f tiene un **máximo (mínimo) local** en $x = p$ si en algún intervalo alrededor de p de la forma $I = (p - \delta, p + \delta)$ se tiene $f(p) \geq f(x)$ ($f(p) \leq f(x)$) para todo x del intervalo I .



5.2.2. Máximos y mínimos locales. Puntos de inflexión

MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES

Una función f tiene un **máximo (mínimo) local** en $x = p$ si en algún intervalo alrededor de p de la forma $I = (p - \delta, p + \delta)$ se tiene $f(p) \geq f(x)$ ($f(p) \leq f(x)$) para todo x del intervalo I .

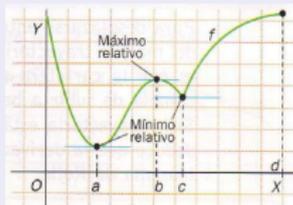


Si f tiene un máximo o mínimo local (llamados también **extremos locales**) en $x = p$ y es derivable en este punto, debe tener $f'(p) = 0$.

5.2.2. Máximos y mínimos locales. Puntos de inflexión

MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES

Una función f tiene un **máximo (mínimo) local** en $x = p$ si en algún intervalo alrededor de p de la forma $I = (p - \delta, p + \delta)$ se tiene $f(p) \geq f(x)$ ($f(p) \leq f(x)$) para todo x del intervalo I .



Si f tiene un máximo o mínimo local (llamados también **extremos locales**) en $x = p$ y es derivable en este punto, de debe tener $f'(p) = 0$.

NOTA: Los puntos en los que $f'(p) = 0$ se llaman **puntos críticos** de f . Los extremos relativos de una función derivable son puntos críticos, pero no todos los puntos críticos son extremos relativos (¿Ejemplo?)

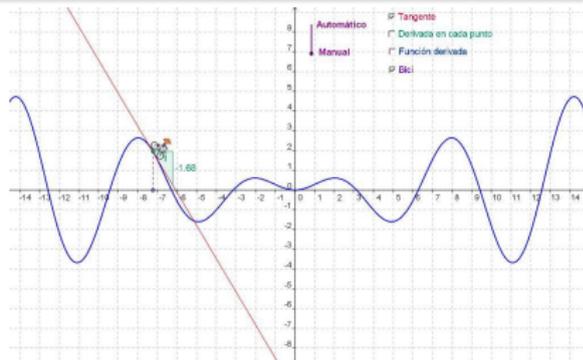
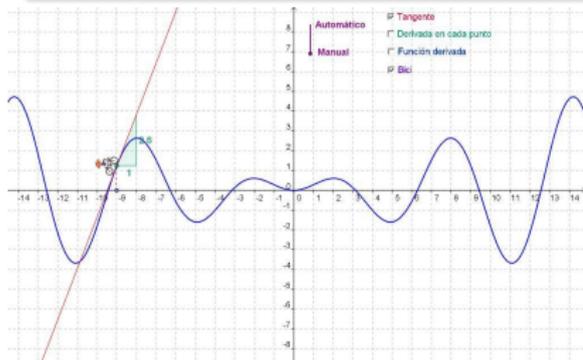
CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

- ★ Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, f es creciente en $[a, b]$.
- ★ Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, f es decreciente en $[a, b]$.

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

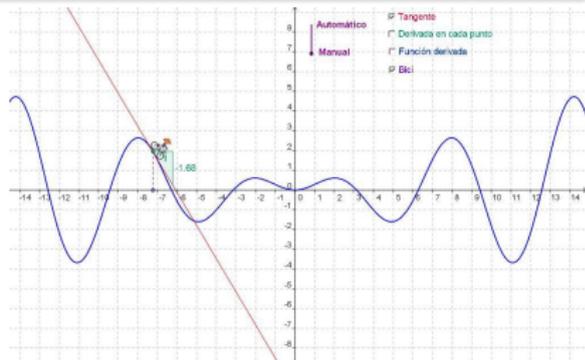
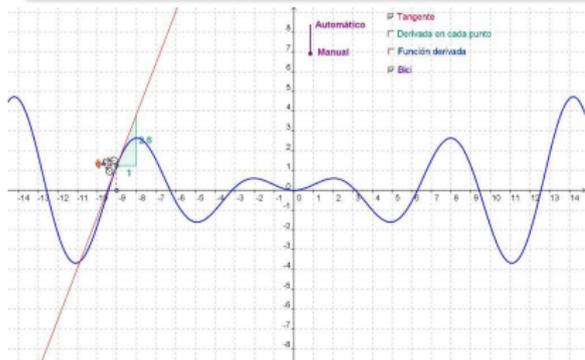
★ Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, f es creciente en $[a, b]$.

★ Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, f es decreciente en $[a, b]$.



CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

- ★ Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, f es creciente en $[a, b]$.
- ★ Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, f es decreciente en $[a, b]$.



EXTREMOS LOCALES Y DERIVADA SEGUNDA

Sea f una función que satisface $f'(p) = 0$ y que tiene segunda derivada continua en un intervalo I que contiene a p .

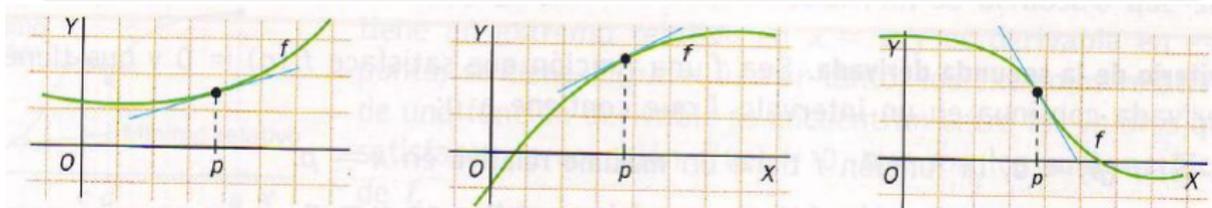
- ★ Si $f''(p) < 0$ la función f tiene un máximo local en $x = p$.
- ★ Si $f''(p) > 0$ la función f tiene un mínimo local en $x = p$.

CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD

Una función f derivable en p es **convexa (cóncava)** en p si en algún intervalo I que contiene a p la gráfica de f está por encima (debajo) de la recta tangente a f en el punto $(p, f(p))$.

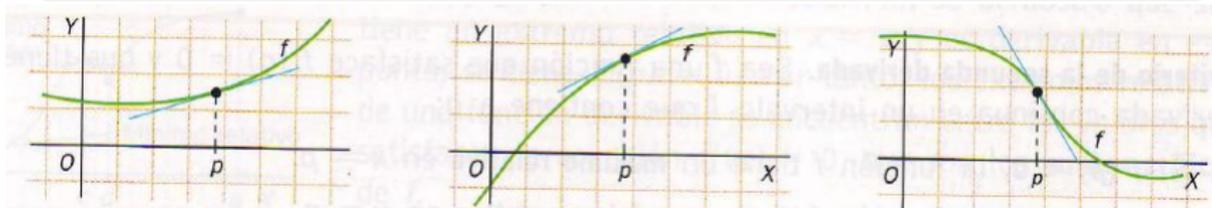
CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD

Una función f derivable en p es **convexa (cóncava)** en p si en algún intervalo I que contiene a p la gráfica de f está por encima (debajo) de la recta tangente a f en el punto $(p, f(p))$.



CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD

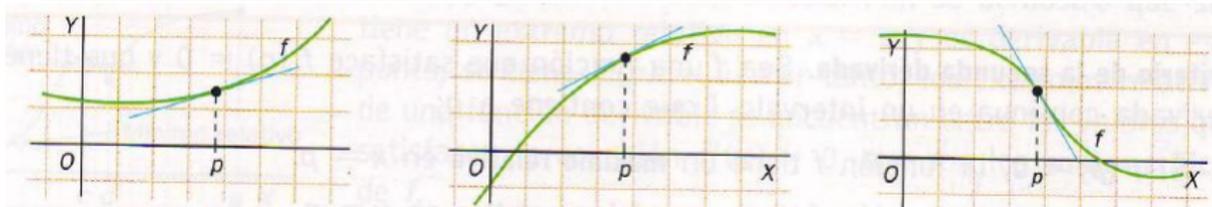
Una función f derivable en p es **convexa (cóncava)** en p si en algún intervalo I que contiene a p la gráfica de f está por encima (debajo) de la recta tangente a f en el punto $(p, f(p))$.



- ★ Si $f''(x) > 0$ en un intervalo I la función f es convexa en I .
- ★ Si $f''(x) < 0$ en un intervalo I la función f es cóncava en I .

CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD

Una función f derivable en p es **convexa (cóncava)** en p si en algún intervalo I que contiene a p la gráfica de f está por encima (debajo) de la recta tangente a f en el punto $(p, f(p))$.



- ★ Si $f''(x) > 0$ en un intervalo I la función f es convexa en I .
- ★ Si $f''(x) < 0$ en un intervalo I la función f es cóncava en I .

D./ El error de la aproximación lineal de f cerca de p es

$$f(x) - [f(p) + f'(p)(x - p)] = \frac{1}{2}f''(\alpha)(x - p)^2.$$

con α entre x y p . ■

PUNTOS DE INFLEXIÓN

En un punto de inflexión p la gráfica de una función pasa de ser convexa a cóncava o de cóncava a convexa. Si f es una función con dos derivadas en un intervalo que contiene a p se ha de tener $f''(p) = 0$.

PUNTOS DE INFLEXIÓN

En un punto de inflexión p la gráfica de una función pasa de ser convexa a cóncava o de cóncava a convexa. Si f es una función con dos derivadas en un intervalo que contiene a p se ha de tener $f''(p) = 0$.

NOTA: Para decidir si una función tiene en p un punto de inflexión no basta con saber que $f''(p) = 0$ (¿Ejemplo?). Es necesario estudiar la convexidad y la concavidad en un intervalo que contenga a p .

PUNTOS DE INFLEXIÓN

En un punto de inflexión p la gráfica de una función pasa de ser convexa a cóncava o de cóncava a convexa. Si f es una función con dos derivadas en un intervalo que contiene a p se ha de tener $f''(p) = 0$.

NOTA: Para decidir si una función tiene en p un punto de inflexión no basta con saber que $f''(p) = 0$ (¿Ejemplo?). Es necesario estudiar la convexidad y la concavidad en un intervalo que contenga a p .

Ejercicio 9. (Oposiciones 2010, Madrid, Problema 4). Sea f una función de variable real, $f \in C^3(\mathbb{R})$, tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{1/x} = e^3.$$

Calcule razonadamente $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$.



5.2.3. Representación gráfica de funciones.

5.2.3. Representación gráfica de funciones.

1. Información obtenida a partir de f .

1.1. Dominio de definición.

1.2. Intersección con los ejes coordenados.

1.3. Signo de f .

1.4. Simetrías.

1.5. Periodicidad.

1.6. Asíntotas verticales ($y = c$ es asíntota vertical si se cumple $\lim_{x \rightarrow \pm c} = \pm\infty$) y comportamiento de la función cerca de ellas.

1.7. Asíntotas horizontales ($x = a$ es una asíntota horizontal si se cumple $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = a$) y comportamiento de la función cerca de ellas.

1.8. Asíntotas oblicuas : $y = mx + b$, donde $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$.

2. Información obtenida a partir de f' .

- 2.1. Dominio de definición de f' .
- 2.2. Crecimiento y decrecimiento.
- 2.3. Máximos y mínimos locales.

2. Información obtenida a partir de f' .

- 2.1. Dominio de definición de f' .
- 2.2. Crecimiento y decrecimiento.
- 2.3. Máximos y mínimos locales.

3. Información obtenida a partir de f'' .

- 3.1. Concavidad y convexidad.
- 3.2. Puntos de inflexión.

2. Información obtenida a partir de f' .

- 2.1. Dominio de definición de f' .
- 2.2. Crecimiento y decrecimiento.
- 2.3. Máximos y mínimos locales.

3. Información obtenida a partir de f'' .

- 3.1. Concavidad y convexidad.
- 3.2. Puntos de inflexión.

Ejercicio 10. Representar gráficamente la función

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}.$$