5. ANÁLISIS MATEMÁTICO // 5.1. FUNCIONES Y LÍMITES.

Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR
EN MATEMÁTICAS
Curso 2010-2011

5.1.1. Las magnitudes variables: funciones.

5.1.1. Las magnitudes variables: funciones.

★ El concepto de fórmula en la que aparecen magnitudes conectadas que van variando conjuntamente aparece en los trabajos de Galileo (siglos XVI y XVII) sobre el movimiento de los cuerpos.

5.1.1. Las magnitudes variables: funciones.

★ El concepto de fórmula en la que aparecen magnitudes conectadas que van variando conjuntamente aparece en los trabajos de Galileo (siglos XVI y XVII) sobre el movimiento de los cuerpos.

★ El concepto de función invade no solo la matemática sino también otras muchas ciencias: biológicas, quimicas y, mucho mas frecuentemente, físicas.

5.1.1. Las magnitudes variables: funciones.

★ El concepto de fórmula en la que aparecen magnitudes conectadas que van variando conjuntamente aparece en los trabajos de Galileo (siglos XVI y XVII) sobre el movimiento de los cuerpos.

★ El concepto de función invade no solo la matemática sino también otras muchas ciencias: biológicas, quimicas y, mucho mas frecuentemente, físicas.

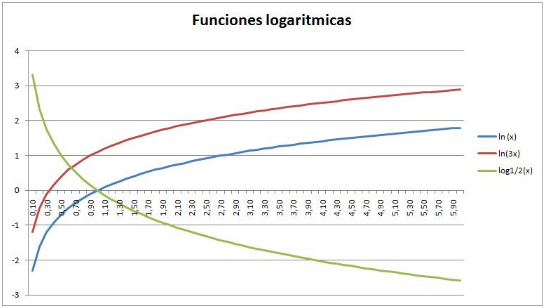
Ejemplos.

1. El espacio que recorre un objeto que cae libremente en el vacio es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado en movimiento: $s = \frac{1}{2}gt^2$.
2. El área, de un hexágono regular es proporcional al cuadrado de su lado: $A = \frac{3}{2}\sqrt{3}\ell^2$.
3. Para un gas encerrado en un recipiente, el producto de la presión por el volumen es constante (Ley de Boyle): $p = c/v$.

La **representación gráfica** de funciones se realiza en un sistema de coordenadas cartesianas. El valor que toma la variable dependiente, y, al dar un valor a la variable independiente, x, se representa en el plano con el punto (x, y).

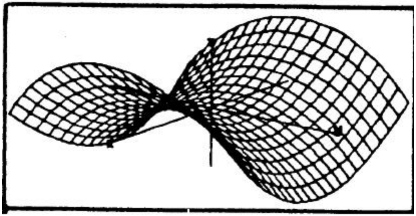
La **representación gráfica** de funciones se realiza en un sistema de coordenadas cartesianas. El valor que toma la variable dependiente, y, al dar un valor a la variable independiente, x, se representa en el plano con el punto (x, y).

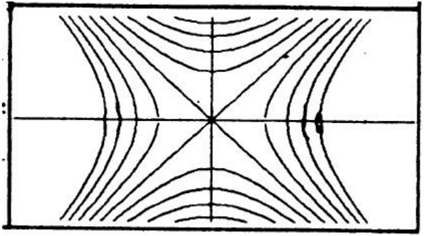
x	ln (x)	ln(3x)	log1/2(x)
0,10	-2,30258509	-1,2039728	3,32192809
0,20	-1,60943791	-0,51082562	2,32192809
0,30	-1,2039728	-0,10536052	1,73696559
0,40	-0,91629073	0,18232156	1,32192809
0,50	-0,69314718	0,40546511	1
0,60	-0,51082562	0,58778666	0,73696559
0,70	-0,35667494	0,74193734	0,51457317
0,80	-0,22314355	0,87546874	0,32192809
0,90	-0,10536052	0,99325177	0,15200309
1,00	-1,1102E-16	1,09861229	1,6017E-16
1,10	0,09531018	1,19392247	-0,13750352
1,20	0,18232156	1,28093385	-0,26303441
1,30	0,26236426	1,36097655	-0,37851162
1,40	0,33647224	1,43508453	-0,48542683
1,50	0,40546511	1,5040774	-0,5849625
1,60	0,47000363	1,56861592	-0,67807191
1,70	0,53062825	1,62924054	-0,76553475
1,80	0,58778666	1,68639895	-0,84799691
1,90	0,64185389	1,74046617	-0,92599942
2,00	0,69314718	1,79175947	-1



Una función puede tener dos (o más) variables independientes: $z = f(x, y) = x^2 - y^2$. Su **representación gráfica** se realiza en un espacio de tres dimensiones. Sus **curvas de nivel**, es decir las curvas planas que se obtienen para diversos valores de z, nos pueden dar una idea del comportamiento de la función (este tipo de representación es la que se usa en los mapas cartográficos).

Una función puede tener dos (o más) variables independientes: $z = f(x, y) = x^2 - y^2$. Su **representación gráfica** se realiza en un espacio de tres dimensiones. Sus **curvas de nivel**, es decir las curvas planas que se obtienen para diversos valores de z, nos pueden dar una idea del comportamiento de la función (este tipo de representación es la que se usa en los mapas cartográficos).





La distancia recorrida por un objeto que cae libremente en el vacío está dada por $s = \frac{1}{2}gt^2$. Su velocidad media después de haber recorrido t_0 segundos es:

$$v_m = \frac{\frac{1}{2}gt_0^2}{t_0} = \frac{1}{2}gt_0$$

5.1.2. Límites de sucesiones y de funciones.

La distancia recorrida por un objeto que cae libremente en el vacío está dada por $s = \frac{1}{2}gt^2$. Su velocidad media después de haber recorrido t_0 segundos es:

$$v_m = \frac{\frac{1}{2}gt_0^2}{t_0} = \frac{1}{2}gt_0$$

Su velocidad en el instante t_0 es mayor.

¿Como se calcula?

5.1.2. Límites de sucesiones y de funciones.

La distancia recorrida por un objeto que cae libremente en el vacío está dada por $s = \frac{1}{2}gt^2$. Su velocidad media después de haber recorrido t_0 segundos es:

$$v_m = \frac{\frac{1}{2}gt_0^2}{t_0} = \frac{1}{2}gt_0$$

Su velocidad en el instante t_0 es mayor.

¿Como se calcula?

$$v = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}g(t_0+1/n)^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{(t_0+1/n)-t_0} = \frac{\frac{1}{2}g[2\frac{t_0}{n}+\frac{1}{n^2}]}{1/n} = gt_0\,.$$

Límite de una sucesión

Una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tiene límite a cuando n tiende a infinito, y escribimos $\lim_{n\to\infty} = a$, si para todo $\epsilon > 0$ se puede encontrar un número entero N, que dependerá de ϵ, tal que $|a_n - a| < \epsilon$, para todo $n \geq N$.

Límite de una sucesión

Una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tiene límite a cuando n tiende a infinito, y escribimos $\lim_{n\to\infty} = a$, si para todo $\epsilon > 0$ se puede encontrar un número entero N, que dependerá de ϵ, tal que $|a_n - a| < \epsilon$, para todo $n \geq N$.

Ejercicio 1. Para la sucesion $a_n = \frac{n}{n+2}$ hallar un valor de N que valga según la definición de límite de una sucesión para $\epsilon = 0,01$.

Demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1 .$$

$n=1$	$0'333\widehat{3}\ldots$
$n=2$	$0'5$
$n=3$	$0'6$
$n=4$	$0'666\widehat{6}\ldots$
$n=5$	$0'714285\widehat{714}\ldots$
$n=10$	$0'8333\widehat{3}\ldots$
$n=50$	$0'961538461\ldots$
$n=100$	$0'980392156\ldots$
$n=1000$	$0'998003992\ldots$
$n=10.000$	$0'999800039\ldots$
$n=100.000$	$0'99998$
$n=1.000.000$	$0'999998$

Ejercicio 2. Con una tabla de valores de la sucesión

$$\sqrt{3}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[8]{3}, \ldots, \sqrt[2^n]{3}, \ldots$$

conjetura cual es el límite de la sucesión y demuestra tu conjetura.

Ejercicio 2. Con una tabla de valores de la sucesión

$$\sqrt{3}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[8]{3}, \ldots, \sqrt[2^n]{3}, \ldots$$

conjetura cual es el límite de la sucesión y demuestra tu conjetura.

$$\sqrt{3} = 1'732050807\ldots$$
$$\sqrt[4]{3} = 1'316074012\ldots$$
$$\sqrt[8]{3} = 1'14720269\ldots$$
$$\sqrt[16]{3} = 1'071075482\ldots$$
$$\sqrt[2^5]{3} = 1'034927766.$$
$$\sqrt[2^{10}]{3} = 1'001073438\ldots$$
$$\sqrt[2^{15}]{3} = 1'000033526\ldots$$
$$\sqrt[2^{20}]{3} = 1'000001046\ldots$$

★ La sucesión del ejercicio 1 es **monótona creciente** y la del ejercicio 2 es **monótona decreciente**.

★ La sucesión del ejercicio 1 es **monótona creciente** y la del ejercicio 2 es **monótona decreciente**.

Convergencia de sucesiones monótonas

Toda sucesión **monótona de números reales** que esté **acotada** tiene límite en el conjunto de los números reales.

★ La sucesión del ejercicio 1 es **monótona creciente** y la del ejercicio 2 es **monótona decreciente**.

CONVERGENCIA DE SUCESIONES MONÓTONAS

Toda sucesión **monótona de números reales** que esté **acotada** tiene límite en el conjunto de los números reales.

Ejercicio 3. Usando la definición de supremo de un conjunto de números reales, demuestra que toda sucesión monótona creciente que esté acotada superiormente tiene límite en el conjunto de los números reales.

★ La sucesión del ejercicio 1 es **monótona creciente** y la del ejercicio 2 es **monótona decreciente**.

Convergencia de sucesiones monótonas

Toda sucesión **monótona de números reales** que esté **acotada** tiene límite en el conjunto de los números reales.

Ejercicio 3. Usando la definición de supremo de un conjunto de números reales, demuestra que toda sucesión monótona creciente que esté acotada superiormente tiene límite en el conjunto de los números reales.

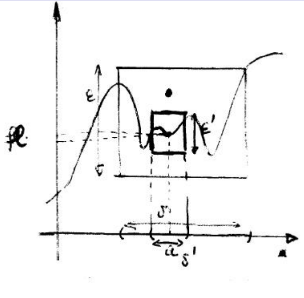
El número e

La sucesión $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ es monótona creciente. Además está acotada superiormente por $B = 3$ (pruebaló). Por el resultado sobre convergencia de sucesiones monótonas, tiene límite y su límite es un número real:

$$e = 2,71828183....$$

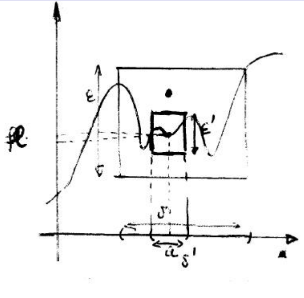
LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

El límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a a es ℓ, y se escribe $\lim_{n\to a} = \ell$, si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \neq a$ que satisface $|x - a| < \delta$ se tiene $|f(x) - \ell| < \epsilon$ (Nota: el número δ depende de ϵ.)



Límite de una función en un punto

El límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a a es ℓ, y se escribe $\lim_{n\to a} = \ell$, si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \neq a$ que satisface $|x - a| < \delta$ se tiene $|f(x) - \ell| < \epsilon$ (Nota: el número δ depende de ϵ.)



Ejercicio 4. Crea una tabla de valores de la función $f(x) = \frac{Sen\,x}{x}$ para valores de x cercanos a cero y conjetura cual es su límite. Demuestra tu conjetura.

RADIAN = x	sen x	sen x / x
1	0'84147098	0'84147098
0'5	0'47942554	0'95885108
0'1	0'099833417	0'99833417
0'01	0'0099998333	0'99998333
0'001	0'000999999983	0'99999983
0'0001	0'000100000000	1'00000000

5.1.3. Funciones continuas.

FUNCIÓN CONTINUA EN UN PUNTO

Una función f es continua en el punto a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Por tanto, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, que dependerá de ϵ, tal que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ si se cumple $|x - a| < \delta$.

5.1.3. Funciones continuas.

FUNCIÓN CONTINUA EN UN PUNTO

Una función f es continua en el punto a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Por tanto, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, que dependerá de ϵ, tal que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ si se cumple $|x - a| < \delta$.

TEOREMA DE BOLZANO

Si $f(x)$ es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, existe al menos un número real $s \in (a, b)$ tal que $f(s) = 0$.

D/. Usar el principio de los intervalos encajados. ■

5.1.3. Funciones continuas.

FUNCIÓN CONTINUA EN UN PUNTO

Una función f es continua en el punto a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Por tanto, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, que dependerá de ϵ, tal que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ si se cumple $|x - a| < \delta$.

TEOREMA DE BOLZANO

Si $f(x)$ es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, existe al menos un número real $s \in (a, b)$ tal que $f(s) = 0$.

D/. Usar el principio de los intervalos encajados. ■

NOTA: Esta demostración del Teorema de Bolzano es el principio del método de la bisección para hallar las soluciones aproximadas de la ecuación $f(x) = 0$ cuando f es continua.

Ejercicio 5. Demuestra que la ecuacion $x^3 + 5x + 1 = 0$ tiene alguna solución real y localizalá en un intervalo de longitud 0,1.

Ejercicio 5. Demuestra que la ecuacion $x^3 + 5x + 1 = 0$ tiene alguna solución real y localizalá en un intervalo de longitud 0,1.

Ejercicio 6. Demuestra que las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = x$ se cortan en algún punto.

Ejercicio 5. Demuestra que la ecuacion $x^3 + 5x + 1 = 0$ tiene alguna solución real y localizalá en un intervalo de longitud 0,1.

Ejercicio 6. Demuestra que las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = x$ se cortan en algún punto.

Teorema de los valores intermedios

Si $f(x)$ es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ y c es un número cualquiera comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un número real $s \in (a, b)$ tal que $f(s) = c$.

D/. Es un corolario del Teorema de Bolzano considerando la función $g(x) = f(x) - c$. ■