3. Álgebra Lineal // 3.3. Autovalores y autovectores. Sistemas de evolución.

Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR
EN MATEMÁTICAS
Curso 2010-2011

3.3.1. Ejemplos de sistemas de evolución discretos

Ejemplo 1. (Modelo de P. Leslie, 1945)

Para estudiar la evolución de una población de pájaros los dividimos en dos grupos de edad: jóvenes y adultos. Los jóvenes no se reproducen y el 30 % de ellos sobrevive y llegan a la primavera siguiente convertidos en adultos. Cada adulto produce una media de 2 jóvenes por año y el número de adultos que sobrevive cada año es el 40 %. Inicialmente hay 1000 adultos y ningún joven.

3.3.1. Ejemplos de sistemas de evolución discretos

EJEMPLO 1. (MODELO DE P. LESLIE, 1945)

Para estudiar la evolución de una población de pájaros los dividimos en dos grupos de edad: jóvenes y adultos. Los jóvenes no se reproducen y el 30 % de ellos sobrevive y llegan a la primavera siguiente convertidos en adultos. Cada adulto produce una media de 2 jóvenes por año y el número de adultos que sobrevive cada año es el 40 %. Inicialmente hay 1000 adultos y ningún joven.

Formulación matemática

3.3.1. Ejemplos de sistemas de evolución discretos

Ejemplo 1. (Modelo de P. Leslie, 1945)

Para estudiar la evolución de una población de pájaros los dividimos en dos grupos de edad: jóvenes y adultos. Los jóvenes no se reproducen y el 30 % de ellos sobrevive y llegan a la primavera siguiente convertidos en adultos. Cada adulto produce una media de 2 jóvenes por año y el número de adultos que sobrevive cada año es el 40 %. Inicialmente hay 1000 adultos y ningún joven.

Formulación matemática : sean x_n e y_n el número de jóvenes y adultos, respectivamente, al final del año n. Tenemos $x_0 = 0$ e $y_0 = 1000$, y además,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = 2y_{n-1} \\ y_n = 0,3x_{n-1} + 0,4y_{n-1} \end{array} \right\}.$$

Este sistema puede escribir usando matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

Este sistema puede escribir usando matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

Para poder calcular la población de pájaros jóvenes y adultos al finalizar un año n debemos aprender a calcular las potencias de una matriz.

Este sistema puede escribir usando matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

Para poder calcular la población de pájaros jóvenes y adultos al finalizar un año n debemos aprender a calcular las potencias de una matriz.

Además, queremos conocer: **Tasa de crecimiento de cada grupo de edad con el paso del tiempo**, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}, \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{y_{n-1}}.$$

Este sistema puede escribir usando matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

Para poder calcular la población de pájaros jóvenes y adultos al finalizar un año *n* debemos aprender a calcular las potencias de una matriz.

Además, queremos conocer: **Tasa de crecimiento de cada grupo de edad con el paso del tiempo**, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}, \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{y_{n-1}}.$$

y **la distribución de cada grupo de edad con el paso del tiempo**, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_n+y_n}, \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n+y_n}.$$

EJEMPLO 2. (MODELO DE A. MARKOV, 1906)

Dos paises A y B comparten la misma moneda. Inicialmente A tiene el 60 % de la monedas y B tiene el 40 %. Cada año el 80 % de las monedas que hay en un país se queda en el mismo y el 20 % pasa al otro país.

Ejemplo 2. (Modelo de A. Markov, 1906)

Dos paises A y B comparten la misma moneda. Inicialmente A tiene el 60 % de la monedas y B tiene el 40 %. Cada año el 80 % de las monedas que hay en un país se queda en el mismo y el 20 % pasa al otro país.

Escribe la formulación matemática de este sistema evolutivo.

Ejemplo 2. (Modelo de A. Markov, 1906)

Dos paises A y B comparten la misma moneda. Inicialmente A tiene el 60 % de la monedas y B tiene el 40 %. Cada año el 80 % de las monedas que hay en un país se queda en el mismo y el 20 % pasa al otro país.

Escribe la formulación matemática de este sistema evolutivo.

Sean x_n e y_n el el porcentaje de monedas en A y en B, respectivamente, al finalizar el año n. Tenemos $x_0 = 60$ e $y_0 = 40$, y además,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = 0,8x_{n-1} + 0,2y_{n-1} \\ y_n = 0,2x_{n-1} + 0,8y_{n-1} \end{array} \right\}.$$

EJEMPLO 2. (MODELO DE A. MARKOV, 1906)

Dos paises A y B comparten la misma moneda. Inicialmente A tiene el 60 % de la monedas y B tiene el 40 %. Cada año el 80 % de las monedas que hay en un país se queda en el mismo y el 20 % pasa al otro país.

Escribe la formulación matemática de este sistema evolutivo.

Sean x_n e y_n el el porcentaje de monedas en A y en B, respectivamente, al finalizar el año n. Tenemos $x_0 = 60$ e $y_0 = 40$, y además,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = 0,8x_{n-1} + 0,2y_{n-1} \\ y_n = 0,2x_{n-1} + 0,8y_{n-1} \end{array} \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

y de nuevo necesitamos saber calcular la potencias de una matriz.

3.3.2. Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

Para una matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ sus potencias son $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$. Si $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se tiene que:

$$D(\vec{e_1}) = D\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{e_1} \quad \text{y} \quad D(\vec{e_2}) = D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \vec{e_2}$$

3.3.2. Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

Para una matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ sus potencias son $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$. Si $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se tiene que:

$$D(\vec{e_1}) = D\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{e_1} \quad \text{y} \quad D(\vec{e_2}) = D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \vec{e_2}$$

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DE UNA MATRIZ A

Un número real, λ, es un autovalor de una matriz cuadrada A si existe un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, tal que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. El vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es un autovector de A con autovalor λ.

3.3.2. Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

Para una matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ sus potencias son $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$. Si $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se tiene que:

$$D(\vec{e_1}) = D\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{e_1} \quad \text{y} \quad D(\vec{e_2}) = D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \vec{e_2}$$

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DE UNA MATRIZ A

Un número real, λ, es un autovalor de una matriz cuadrada A si existe un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, tal que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. El vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es un autovector de A con autovalor λ.

NOTA: Si $\vec{v}$ es un autovector de una matriz A con autovalor λ y k es un número real no nulo, el vector $\vec{u} = k\vec{v}$ es también autovector de A con autovalor λ.

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Si una matriz cuadrada A de orden k tiene k autovalores reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ (quizá repetidos) y k autovectores $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k}\}$ linealmente independientes correspondientes con los autovalores, puede diagonalizarse como

$$A = PDP^{-1} \,,$$

donde $D = (\lambda_j)$ es una matriz diagonal formada con los autovalores de A y P es la matriz de los autovectores puestos por columnas en el mismo orden que los autovalores colocados en D.

Diagonalización de matrices

Si una matriz cuadrada A de orden k tiene k autovalores reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ (quizá repetidos) y k autovectores $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k}\}$ linealmente independientes correspondientes con los autovalores, puede diagonalizarse como

$$A = PDP^{-1} \, ,$$

donde $D = (\lambda_j)$ es una matriz diagonal formada con los autovalores de A y P es la matriz de los autovectores puestos por columnas en el mismo orden que los autovalores colocados en D.

Si tenemos $A = PDP^{-1}$ entonces $A^n = PD^nP^{-1}$ y se pueden calcular fácilmente las potencias de A.

CÁLCULO DE AUTOVALORES.

Los autovalores de una matriz cuadrada A son las soluciones λ de la ecuación $det(A - \lambda I_k) = 0$.

CÁLCULO DE AUTOVALORES.

Los autovalores de una matriz cuadrada A son las soluciones λ de la ecuación $det(A - \lambda I_k) = 0$.

Ejercicio 1. Hallar los autovalores de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cálculo de autovalores.

Los autovalores de una matriz cuadrada A son las soluciones λ de la ecuación $det(A - \lambda I_k) = 0$.

Ejercicio 1. Hallar los autovalores de la matriz
$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2. Hallar los autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix},$$

que es la matriz de evolución del ejemplo 1.

Cálculo de autovalores.

Los autovalores de una matriz cuadrada A son las soluciones λ de la ecuación $det(A - \lambda I_k) = 0$.

Ejercicio 1. Hallar los autovalores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2. Hallar los autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix},$$

que es la matriz de evolución del ejemplo 1.

Ejercicio 3. Hallar los autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix},$$

que es la matriz de evolución del ejemplo 2.

Cálculo de autovectores.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovector de una matriz cuadrada A de tamaño k, cualquier solución **no nula** de la ecuación $(A - \lambda I_k)\vec{x} = \vec{0}\,, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, es un autovector de A de autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cálculo de autovectores.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovector de una matriz cuadrada A de tamaño k, cualquier solución **no nula** de la ecuación $(A - \lambda I_k)\vec{x} = \vec{0}\,, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, es un autovector de A de autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4. Hallar dos autovectores linealmente independientes de $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, y escribir A en su forma diagonal indicando la matriz de paso P.

CÁLCULO DE AUTOVECTORES.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovector de una matriz cuadrada A de tamaño k, cualquier solución **no nula** de la ecuación $(A - \lambda I_k)\vec{x} = \vec{0}\,, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, es un autovector de A de autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4. Hallar dos autovectores linealmente independientes de $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, y escribir A en su forma diagonal indicando la matriz de paso P.

Ejercicio 5. Hallar dos autovectores linealmente independientes de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$, y escribir A en su forma diagonal indicando la matriz de paso P.

Ejercicio 6. Hallar los autovectores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

, y decidir si es posible encontrar tres autovectores linealmente independientes.

Ejercicio 6. Hallar los autovectores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

, y decidir si es posible encontrar tres autovectores linealmente independientes.

AUTOVALORES REALES DISTINTOS

Si A es una matriz de orden k con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ **distintos**, sus autovectores $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k}\}$ son linealmente independientes.

3.3.3. Significado de los autovalores y autovectores en los modelos de evolución discretos.

SOLUCIÓN PARA MATRICES DIAGONALIZABLES

El sistema de evolución discreto $\vec{X}_n = A\overrightarrow{X_{n-1}}$, donde A es una matriz de orden k diagonalizable, satisface

$$\vec{X}_n = C_1\lambda_1^n\vec{u}_1 + C_2\lambda_2^n\vec{u}_2 + \cdots + C_k\lambda_k^n\vec{u}_k \, ,$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ (quizá repetidos) son los autovalores reales de A y $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ son sus correspondientes autovectores linealmente independientes. Las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_k$ se deteminan con las condiciones iniciales.

Ejercicio 7. Determinar cuál es la población de pájaros en cada grupo de edad a lo largo del tiempo en el sistema evolutivo del ejemplo 1:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7. Determinar cuál es la población de pájaros en cada grupo de edad a lo largo del tiempo en el sistema evolutivo del ejemplo 1:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

Solución: Los autovalores de la matriz son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -0,6$ con autovectores $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -0,6 \end{pmatrix}$. Entonces, la cantidad de pájaros en cada grupo de edad al final del año n es

$$x_n = \frac{40000}{32} - \frac{40000}{32}(-0,6)^n$$

$$y_n = \frac{20000}{32} - \frac{12000}{32}(-0,6)^n.$$

Cuando n tiende a infinito, x_n tiende a 1250 e y_n tiende a 625. Por tanto el sistema tenderá a tener 1875 pájaros, de los cuales $2/3 \approx 66,66\,\%$ serán jóvenes y $1/3 \approx 33,33\,\%$ serán adultos.

Autovalor dominante de una matriz

Un autovalor real $\lambda > 0$ de una matriz diagonalizable *A* se dice que es **dominante** si para cualquier otro autovalor $\beta \neq \lambda$ de *A* se tiene $\lambda > |\beta|$.

AUTOVALOR DOMINANTE DE UNA MATRIZ

Un autovalor real $\lambda > 0$ de una matriz diagonalizable A se dice que es **dominante** si para cualquier otro autovalor $\beta \neq \lambda$ de A se tiene $\lambda > |\beta|$.

TASA DE CRECIMIENTO DE CADA GRUPO DE EDAD

Sea $\vec{X}_n = A\overrightarrow{X_{n-1}}$ un sistema de evolución con k grupos de edad. Si la matriz A es diagonalizable con autovalor dominante λ_1, la **tasa de crecimiento** de cada grupo de edad tiende a λ_1 con el paso del tiempo.

Distribución de la población en cada grupo de edad

Sea $\vec{X}_n = A\overrightarrow{X_{n-1}}$ un sistema de evolución con k grupos de edad. Si la matriz A es diagonalizable y λ_1 es un autovalor dominante de A con autovector $\vec{u_1} = (u_1, u_2, \ldots, u_k)^t$ el porcentaje de individuos en el grupo de edad j con el paso del tiempo tiende a

$$\frac{u_j}{u_1 + \cdots + u_k} \times 100\,\%\,, \quad j = 1, 2, \ldots, k\,.$$

Ejercicio 8. Una población de individuos está distribuida en dos grupos de edad, jóvenes y adultos. Cada año un individuo joven produce, en promedio, 1,5 nuevos jóvenes, y un individuo adulto produce, en promedio, 2 nuevos jóvenes. Por otro lado, solo el 8 % de los jóvenes sobrevive y pasa a ser adulto, mientras que todos los individuos adultos han muerto al finalizar el segundo año.

a) Escribe el modelo matricial de la dinámica de esta población.
b)¿Cuál es la tasa de crecimiento de cada grupo de edad con el paso del tiempo?
c) ¿Cómo se distribuye la población con el paso del tiempo?
d) Si inicialmente hay 100 jóvenes y 100 adultos, ¿cuántos habrá en cada grupo después de 10 años?

Ejercicio 9. Una colonia de perdices vive en dos ecosistemas X e Y. Inicialmente hay 1500 perdices en X y 500 en Y. Cada mes el 5 % de las perdices de X migra a Y y a su vez el 5 % de las perdices de Y migra a X.

a) Escribe las ecuaciones de la evolución del número de perdices en cada ecosistema.
b)¿Qué cantidad de perdices habrá en cada ecosistema después de 1 año?
c) ¿Qué cantidad de perdices habrá en cada ecosistema con el paso del tiempo?

3.3.4. Procesos de Markov.

Proceso de Markov

Un sistema evolutivo de la forma $\vec{X}_n = T\overrightarrow{X_{n-1}}$ donde T es una matriz cuadrada de orden k en la que la suma de los elementos de cada una de sus columnas es 1 se llama un **proceso de Markov**. La matriz T se denomina **matriz de transición** del proceso.

Proceso de Markov

Un sistema evolutivo de la forma $\vec{X_n} = T\overrightarrow{X_{n-1}}$ donde T es una matriz cuadrada de orden k en la que la suma de los elementos de cada una de sus columnas es 1 se llama un **proceso de Markov**. La matriz T se denomina **matriz de transición** del proceso.

Ejemplo 3

El ejemplo 2 , que es un proceso de Markov, puede reinterpretarse probabilísticamente. Sean p_n y q_n las probabilidades de que una moneda elegida al azar esté en el pais A o B al finalizar el año n . Por supuesto que $p_n + q_n = 1$. Tenemos $p_0 = 0,6$ y $q_0 = 0,4$, y el proceso obedece la ley:

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 4

En una provincia se ha observado que si un dia llueve la probabilidad de que llueva al dia siguiente es 0,8. Sin embargo, si un dia está soleado la probabilidad de que al dia siguiente esté soleado es 0,7.

Ejemplo 4

En una provincia se ha observado que si un dia llueve la probabilidad de que llueva al dia siguiente es 0,8. Sin embargo, si un dia está soleado la probabilidad de que al dia siguiente esté soleado es 0,7.

Escribe la formulación matemática de este sistema evolutivo.

EJEMPLO 4

En una provincia se ha observado que si un dia llueve la probabilidad de que llueva al dia siguiente es 0,8. Sin embargo, si un dia está soleado la probabilidad de que al dia siguiente esté soleado es 0,7.

Escribe la formulación matemática de este sistema evolutivo.

Sea p_n las probabilidad de que llueva el dia n y q_n la probabilidad de que esté soleado el dia n. El proceso se resume en

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Invarianza

La suma de las cantidades iniciales en un proceso de Markov permanece invariante durante todo el proceso.

Invarianza

La suma de las cantidades iniciales en un proceso de Markov permanece invariante durante todo el proceso.

Autovalor 1

$\lambda = 1$ es el mayor autovalor de la matriz de transición de un proceso de Markov.

INVARIANZA

La suma de las cantidades iniciales en un proceso de Markov permanece invariante durante todo el proceso.

AUTOVALOR 1

$\lambda = 1$ es el mayor autovalor de la matriz de transición de un proceso de Markov.

El autovalor 1 puede no ser dominante para una matriz de Markov. Si es dominante se pueden aplicar las conclusiones de la sección 3.3.1.

Ejercicio 10. En el ejemplo de los paises que comparten monedas, regido por el proceso,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

determinar:

a) En qué porcentaje se estabiliza la cantidad de monedas en cada pais.
b) El porcentaje de monedas en cada pais al cabo de 10 años.

Ejercicio 11. La probabilidad de que un dia esté lluvioso o soleado en la provincia del ejemplo 4 se regía por el proceso,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

a) Si el dia primero de un mes está soleado, ¿cuál es la probabilidad de lluvia el dia 30 del mismo mes?
b) ¿Cómo evoluciona este sistema con el paso del tiempo?