3. Álgebra Lineal // 3.1. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR EN MATEMÁTICAS
Curso 2010-2011

3.1.1. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss

Ejercicio 1. Resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{r} x + 3y + z = -3 \\ 3x + 9y + 4z = -7 \\ 2x - y + z = 6 \end{array} \right\}.$$

3.1.1. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss

Ejercicio 1. Resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{r} x + 3y + z = -3 \\ 3x + 9y + 4z = -7 \\ 2x - y + z = 6 \end{array} \right\}.$$

Dos SEL son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Las siguientes operaciones elementales transforman un sistema en otro equivalente:

- Multiplicar una ecuación por un número real no nulo.
- Intercambiar dos ecuaciones.
- Sumar o restar un múltiplo de una ecuación a otra.

El método de Gauss consiste en transformar un sistema en otro equivalente usando las operaciones elementales.

Ejercicio 2. Resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{array} \right\} .$$

Ejercicio 2. Resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Ejercicio 3. Resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{r} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 3 \end{array} \right\}.$$

Ejercicio 2. Resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Ejercicio 3. Resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{r} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 3 \end{array} \right\}.$$

Una matriz es escalonada si puede trazarse una escalera descendiente tal que

- Cada peldaño tiene altura 1.
- Debajo de la escalera todos los elementos de la matriz son nulos.
- En cada esquina de un peldaño hay un 1.
- Toda columna con un 1 en un peldaño tiene todos los demás elementos nulos.

Notación general para un SEL

Un SEL de m ecuaciones con n incógnitas se escribe de la forma $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, donde A es una matriz de orden $m \times n$, $\overrightarrow{x}$ es un vector columna de tamaño $n \times 1$ y $\overrightarrow{b}$ es un vector columna de tamaño $m \times 1$.

- $A =$ matriz del SEL; $\overline{A}$ =matriz ampliada añadiendo el término independiente como última columna.
- $p =$ número de peldaños de una matriz escalonada de A.
- $\overline{p} =$ número de peldaños de una matriz escalonada de $\overline{A}$.
- $n =$ número de incógnitas

Notación general para un SEL

Un SEL de m ecuaciones con n incógnitas se escribe de la forma $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, donde A es una matriz de orden $m \times n$, $\overrightarrow{x}$ es un vector columna de tamaño $n \times 1$ y $\overrightarrow{b}$ es un vector columna de tamaño $m \times 1$.

- $A =$ matriz del SEL; $\overline{A} =$matriz ampliada añadiendo el término independiente como última columna.
- $p =$ número de peldaños de una matriz escalonada de A.
- $\overline{p} =$ número de peldaños de una matriz escalonada de $\overline{A}$.
- $n =$ número de incógnitas

Teorema de Rouche-Frobenius

El SEL $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ es

- Compatible determinado $\Leftrightarrow p = \overline{p} = n$.
- Compatible indeterminado $\Leftrightarrow p = \overline{p} < n$.
- Incompatible $\Leftrightarrow p < \overline{p}$.

3.1.2. Rango de un conjunto de vectores y rango de una matriz

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

i) Un conjunto de vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ es linealmente dependiente (LD) si existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ **no todos nulos** tales que:

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0}\,.$$

ii) Un conjunto de vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ es linealmente independiente (LI) si para todo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0}\,.$$

se tiene $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0\,.$

3.1.2. Rango de un conjunto de vectores y rango de una matriz

Dependencia e independencia lineal

i) Un conjunto de vectores $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_k}$ es linealmente dependiente (LD) si existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ **no todos nulos** tales que:

$$\alpha_1 \vec{a_1} + \alpha_2 \vec{a_2} + \cdots + \alpha_k \vec{a_k} = \vec{0}\,.$$

ii) Un conjunto de vectores $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_k}$ es linealmente independiente (LI) si para todo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\alpha_1 \vec{a_1} + \alpha_2 \vec{a_2} + \cdots + \alpha_k \vec{a_k} = \vec{0}\,.$$

se tiene $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0\,.$

Ejercicio 4. Estudiar la dependencia o independencia lineal de los vectores $\vec{a_1} = (1, 1, 3)$, $\vec{a_2} = (0, 1, 2)$, y $\vec{a_3} = (1, 2, 5)\,.$

Rango

i) Se llama rango de un conjunto de vectores al mayor número de ellos que son LI.

ii) Se llama rango de una matriz A, y se denota por $r(A)$, al rango de sus vectores columna.

Rango

i) Se llama rango de un conjunto de vectores al mayor número de ellos que son LI.
ii) Se llama rango de una matriz A, y se denota por $r(A)$, al rango de sus vectores columna.

¿Cómo se halla el rango de una matriz?

Rango

i) Se llama rango de un conjunto de vectores al mayor número de ellos que son LI.
ii) Se llama rango de una matriz A, y se denota por $r(A)$, al rango de sus vectores columna.

¿Cómo se halla el rango de una matriz?

El rango de una matriz es el número de peldaños de una cualquiera de sus matrices escalonadas.

Rango

i) Se llama rango de un conjunto de vectores al mayor número de ellos que son LI.
ii) Se llama rango de una matriz A, y se denota por $r(A)$, al rango de sus vectores columna.

¿Cómo se halla el rango de una matriz?

El rango de una matriz es el número de peldaños de una cualquiera de sus matrices escalonadas.

Ejercicio 5. Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Rango

i) Se llama rango de un conjunto de vectores al mayor número de ellos que son LI.
ii) Se llama rango de una matriz A, y se denota por $r(A)$, al rango de sus vectores columna.

¿Cómo se halla el rango de una matriz?

El rango de una matriz es el número de peldaños de una cualquiera de sus matrices escalonadas.

Ejercicio 5. Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

NOTA: Reescribir el Teorema de Rouché-Frobenius con la notación de rango de una matriz

3.1.3. Operaciones con matrices

La suma de dos matrices A y B se obtiene sumando los elementos que ocupan la misma posición an ambas matrices.

Una matriz A puede multiplicarse por un número real λ multiplicando por λ todos los elementos de la matriz.

3.1.3. Operaciones con matrices

La suma de dos matrices A y B se obtiene sumando los elementos que ocupan la misma posición an ambas matrices. Una matriz A puede multiplicarse por un número real λ multiplicando por λ todos los elementos de la matriz.

Si $A = (a_{i,j})$ es una matriz de tamaño $m \times n$ y $B = (b_{j,k})$ es una matriz de tamaño $n \times k$, el producto de A y B es otra matriz $AB = C = (c_{i,k})$ de tamaño $m \times k$ donde

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} \, .$$

3.1.3. Operaciones con matrices

La suma de dos matrices A y B se obtiene sumando los elementos que ocupan la misma posición an ambas matrices.
Una matriz A puede multiplicarse por un número real λ multiplicando por λ todos los elementos de la matriz.

Si $A = (a_{i,j})$ es una matriz de tamaño $m \times n$ y $B = (b_{j,k})$ es una matriz de tamaño $n \times k$, el producto de A y B es otra matriz $AB = C = (c_{i,k})$ de tamaño $m \times k$ donde

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} \, .$$

Ejercicio 6. Calcular AB donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Inversa de una matriz

Una matriz cuadrada A de tamaño n es invertible si existe una matriz A^{-1} (su inversa) tal que $A^{-1}A = I_n$ y $AA^{-1} = I_n$, donde I_n es la matriz identidad de tamaño n.

Inversa de una matriz

Una matriz cuadrada A de tamaño n es invertible si existe una matriz A^{-1} (su inversa) tal que $A^{-1}A = I_n$ y $AA^{-1} = I_n$, donde I_n es la matriz identidad de tamaño n.

Demostrar que la inversa de una matriz cuadrada es única

Inversa de una matriz

Una matriz cuadrada A de tamaño n es invertible si existe una matriz A^{-1} (su inversa) tal que $A^{-1}A = I_n$ y $AA^{-1} = I_n$, donde I_n es la matriz identidad de tamaño n.

Demostrar que la inversa de una matriz cuadrada es única

Cálculo de la inversa de una matriz

Para calcular la inversa de una matriz cuadrada A de tamaño n se reduce la matriz $(A|I_n)$ a la matriz $(I_n|B)$ mediante operaciones elementales. Entonces $A^{-1} = B$.

Inversa de una matriz

Una matriz cuadrada A de tamaño n es invertible si existe una matriz A^{-1} (su inversa) tal que $A^{-1}A = I_n$ y $AA^{-1} = I_n$, donde I_n es la matriz identidad de tamaño n.

Demostrar que la inversa de una matriz cuadrada es única

Cálculo de la inversa de una matriz

Para calcular la inversa de una matriz cuadrada A de tamaño n se reduce la matriz $(A|I_n)$ a la matriz $(I_n|B)$ mediante operaciones elementales. Entonces $A^{-1} = B$.

Teorema 1

Una matriz cuadrada A de tamaño n es invertible si y solo si $r(A) = n$.

3.1.4. Determinantes

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $\Delta = ad - cb \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

3.1.4. Determinantes

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $\Delta = ad - cb \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Dada una matriz cuadrada $A = (a_{i,j})$ de tamaño $n > 2$, $A_{i,j}$ denota la matriz cuadrada de tamaño $n-1$ que se obtiene suprimiendo en A la fila i y la columna j.

CÁLCULO DEL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

Dada $A = (a_{i,j})$ de tamaño $n > 2$ su determinante se puede calcular desarrollando por la columna j

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} det(A_{i,j})$$

o por la fila i

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} det(A_{i,j})$$

Ejercicio 7. Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7. Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

P1. Si una matriz cuadrada tiene una fila o columna de ceros, su determinante es nulo.

Ejercicio 7. Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

P1. Si una matriz cuadrada tiene una fila o columna de ceros, su determinante es nulo.

P2. Si C es una matriz en la que una fila o columna es suma de los elementos de la misma fila o columna de dos matrices A y B, siendo iguales el resto de los elementos,

$$det(C) = det(A) + det(B) .$$

P3. Si B es la matriz que se obtiene a partir de una matriz cuadrada A multiplicando una de sus filas o columnas for un número real r,

$$det(B) = r\, det(A)\,.$$

P3. Si B es la matriz que se obtiene a partir de una matriz cuadrada A multiplicando una de sus filas o columnas for un número real r,

$$det(B) = r\, det(A)\,.$$

P4. Si una matriz cuadrada tiene dos filas o columnas iguales su determinante es nulo.

P3. Si B es la matriz que se obtiene a partir de una matriz cuadrada A multiplicando una de sus filas o columnas for un número real r,

$$det(B) = r\, det(A)\,.$$

P4. Si una matriz cuadrada tiene dos filas o columnas iguales su determinante es nulo.

Demostrar que al intercambiar dos filas o columnas de una matriz cuadrada el determinante cambia de signo

P3. Si B es la matriz que se obtiene a partir de una matriz cuadrada A multiplicando una de sus filas o columnas for un número real r,

$$det(B) = r\, det(A)\,.$$

P4. Si una matriz cuadrada tiene dos filas o columnas iguales su determinante es nulo.

Demostrar que al intercambiar dos filas o columnas de una matriz cuadrada el determinante cambia de signo

P5. Si B es la matriz que se obtiene de A sumando un múltiplo de una fila (o columna) de A a otra fila (o columna) de A se tiene que

$$det(B) = det(A)$$

Ejercicio 8. Calcular los determinantes de las siguintes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8. Calcular los determinantes de las siguintes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dada una matriz A de tamaño n el número $c_{i,j} = (-1)^{i+j} det(A_{i,j})$ recibe el nombre de cofactor del elemento que ocupa el lugar (i, j) en la matriz A.

Ejercicio 8. Calcular los determinantes de las siguintes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dada una matriz A de tamaño n el número $c_{i,j} = (-1)^{i+j} det(A_{i,j})$ recibe el nombre de cofactor del elemento que ocupa el lugar (i,j) en la matriz A.

Sea $C = (c_{i,j})$ la matriz de los cofactores de A. Se puede comprobar que $AC^t = det(A)I_n$. Por tanto:

INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA CON DETERMINANTES

Si A es una matriz cuadrada con $det(A) \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} C^t$, donde C es la matriz de cofactores de A.

Ejercicio 9. Hallar la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9. Hallar la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10. Resolver es SEL

$$\left\{ \begin{array}{r} x + 2y = 1 \\ -x + y + 2z = 0 \\ y + 3z = -1 \end{array} \right\}.$$