Universidad Autónoma de Madrid — Curso 2009-10

TOPOLOGÍA — Hoja de ejercicios 3

I.4 Topología producto. Subespacios.

1. En el espacio producto $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ describe la topología inducida en los subconjuntos

$$X = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} \quad e \quad Y = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

2. Sean X e Y espacios topológicos. Sea $A \subset X \times Y$. Sean

$$A_x = \{y \in Y : (x, y) \in A\} \quad y \quad A_y = \{x \in X : (x, y) \in A\}.$$

(i) Demuestra que si A es abierto en $X \times Y$ entonces para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, A_x y A_y son abiertos en Y y en X respectivamente.

(ii) Si A_x y A_y son abiertos para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, ¿es A abierto en $X \times Y$?

3. Se considera la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ en $\mathbb{R}^2$ generada por la base $\mathcal{B}$ del ejercicio 9 de la hoja 1 (Para cada punto (x, y) de $\mathbb{R}^2$ y cada $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$ se considera el siguiente conjunto $B((x, y), r)$: el cuadrado con lados paralelos a los ejes, centrado en (x, y) y de lado $2r$, del que se ha excluido los lados y los puntos de las diagonales que no sean el punto (x, y). $\mathcal{B} = \{B((x, y), r) \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$.) ¿Existen en $\mathbb{R}$ sendas topologías de modo que su producto coincida con la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$?
(Indicación: Prueba que ambas topologías deben ser menos finas que la usual.)

4. Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Sea $\mathcal{T}$ la topología producto en $X \times Y$ construida a partir de las topologías $\mathcal{T}_1$ de X y $\mathcal{T}_2$ de Y. Prueba que si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$ (no necesariamente la "base producto") entonces $p_1(\mathcal{B}) = \{p_1(B) \ : \ B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}_1$ y $p_2(\mathcal{B}) = \{p_2(B) \ : \ B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}_2$. ¿Se puede usar este hecho para resolver el ejercicio anterior?

I.5 Propiedad de separación de Hausdorff.

5. Demuestra que todo espacio métrico es un espacio topológico Hausdorff.

6. Demuestra que X es un espacio topológico con la propiedad de separación de Hausdorff si y sólo si

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$$

es un cerrado en el espacio producto $X \times X$.

7. Estudia la convergencia de la sucesión $(-n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ en $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{\leftarrow}$ (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$) y concluye que el límite de una sucesión no tiene por qué ser único cuando el espacio no es Hausdorff. Por otro lado, aunque $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\leftarrow})$ no es Hausdorff, sí que posee cierta propiedad de separación que el lector puede tratar de descubrir y enunciar.

8. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico T_1. Demuestra que:

(i) Si X es finito, $\mathcal{T}$ es la topología discreta.

(ii) Si A es un subconjunto finito de X, A no tiene puntos de acumulación, es decir $A' = \emptyset$.