

I.3 Interior, adherencia, frontera y derivado.

1. Se considera el siguiente subconjunto de \mathbb{R} :

$$A = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}, 3) \cup \left\{ \frac{3n+10}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}.$$

Hallar $\text{Int } A$, \bar{A} y A' en las siguientes topologías sobre \mathbb{R} :

- (1) La usual.
- (2) La cofinita.
- (3) $\mathcal{T}_{[)}$ (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$).
- (4) La que tiene como base $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$.
- (5) \mathcal{T}_- (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$).

2. Sea X un espacio topológico y $A, D \subset X$. Demuestra lo siguiente:

- (i) $\text{Fr } A = \bar{A} \setminus \text{Int } A$.
- (ii) $\text{Fr } A = \emptyset$ si y sólo si A es simultáneamente abierto y cerrado.
- (iii) Si $\bar{A} \cap \bar{D} = \emptyset$ entonces $\text{Fr}(A \cup D) = \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(D)$.
- (iv) Si A es abierto entonces $A \cap \bar{D} \subset \overline{A \cap D}$. ¿Se satisface la inclusión si A no es abierto?
- (v) Si $A \cup D = X$ entonces $\bar{A} \cup \text{Int } D = \text{Int } A \cup \bar{D} = X$.
- (vi) $\text{Int } A \cup \text{Int } D \subset \text{Int}(A \cup D)$.
- (vii) La inclusión en el apartado anterior puede ser estricta.
 (Indicación: encuentra $A, D \subset \mathbb{R}$ tales que $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(D) \neq \text{Int}(A \cup D)$.)
- (viii) Si $\text{Fr } A = D$ y $\text{Fr } D = A$ entonces $A = D$.

3. Encuentra dos subconjuntos A, D abiertos de \mathbb{R} tal que los cuatro subconjuntos $A \cap \bar{D}$, $\bar{A} \cap D$, $\bar{A} \cap \bar{D}$ y $A \cap D$ sean distintos.

4. Prueba que si en un espacio topológico X , un conjunto A y su complementario son densos (esto es, $\bar{A} = \bar{X - A} = X$), entonces $\text{Int } A = \text{Int}(X - A) = \emptyset$. ¿Es cierto el recíproco?

5. Halla un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que con la topología usual de \mathbb{R} se tenga

$$\text{Fr}(A) = [1, 2] \cup \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

6. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. (i) Para cada $A \subset X$ se tiene que $\text{Int}(\text{Fr } A) = \emptyset$.

- (ii) Si $A \neq \emptyset$ es cerrado y $\text{Int } A = \emptyset$, existe D tal que $A = \text{Fr } D$.
- (iii) Si $\text{Int}(A) \neq \emptyset$ entonces $\text{Int}(\bar{A}) \neq \emptyset$.
- (iv) Para cada $A \subset X$, $\bar{A} = \overline{\text{Int } A}$.
- (v) Si $A \cap \text{Fr}(A) = \emptyset$ entonces A es abierto.
- (vi) Para cada $A \subset X$, el conjunto A' es cerrado.
- (vii) Si $x \notin A'$ entonces $x \notin (\bar{A})'$.

7. Sea X un espacio topológico. Sea $\{A_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos de X .

(i) Demuestra que

$$\bigcup_{i \in I} \bar{A}_i \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}.$$

(ii) Demuestra que si I es finito entonces $\bigcup_{i \in I} \bar{A}_i = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$.

(iii) Halla un contraejemplo que muestre que en general no es cierto que $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \subset \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$.

(iv) Encuentra un fallo en la siguiente falsa demostración de la inclusión citada en (iii):

Si $x \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$ entonces, para todo entorno U de x , $U \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) \neq \emptyset$. Por tanto, $U \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ para algún $i_0 \in I$ y se tiene $x \in \bar{A}_{i_0}$ y $x \in \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$.