Universidad Autónoma de Madrid Curso 2009-10

TOPOLOGÍA

EJEMPLOS DE TOPOLOGÍAS.

1. La topología *indiscreta* o *trivial* sobre X es:

$$\mathcal{T}_{indiscreta} = \{\emptyset, X\}.$$

Es la topología menos fina posible (solamente $\emptyset$ y X son abiertos).

2. La topología *discreta* sobre X es:

$$\mathcal{T}_{discreta} = \mathcal{P}(X).$$

Es la más fina posible (cualquier subconjunto de X es abierto). Para cualquier otra topología $\mathcal{T}$ sobre X se tiene:

$$\mathcal{T}_{indiscreta} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{discreta}.$$

3. El *espacio de Sierpiński.* $X = \{0,1\}$ y $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$.
(Es el espacio topológico más sencillo que no es ni indiscreto ni discreto.)

4. La topología *cofinita* sobre X es:

$$\mathcal{T}_{cof} = \{U \subset X : X \setminus U \text{ es finito }\} \cup \{\emptyset\}.$$

(Los cerrados son los conjuntos finitos y X. Si X es finito $\mathcal{T}_{cof} = \mathcal{T}_{discreta}$.)

5. La topología *conumerable* sobre X es:

$$\mathcal{T}_{conum} = \{U \subset X : X \setminus U \text{ es numerable }\} \cup \{\emptyset\}.$$

Un conjunto es numerable si tiene cardinal $\leq Card(\mathbb{N})$.
(Los cerrados son los conjuntos numerables y X.)

6. La topología *usual* sobre $\mathbb{R}$. $\mathcal{T}_u$ es la que tiene por base

$$\mathcal{B}_u^1 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a < b\} \qquad \text{ó} \qquad \mathcal{B}_u^2 = \{(x-\epsilon, x+\epsilon) : x \in \mathbb{R}, \epsilon \in \mathbb{R} \text{ con } \epsilon > 0\}$$

7. La *recta de Sorgenfrey* o topología del *limite inferior* sobre $\mathbb{R}$. $\mathcal{T}_{[)}$ es la que tiene por base

$$\mathcal{B}_{[)} = \{[a,b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a < b\}.$$

8. La topología del *limite superior* sobre $\mathbb{R}$. $\mathcal{T}_{(]}$ es la que tiene por base

$$\mathcal{B}_{(]} = \{(a,b] : a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a < b\}.$$

9. La topología $\mathcal{T}_{\leftarrow}$ sobre $\mathbb{R}$. Es la que tiene por base

$$\mathcal{B}_{\leftarrow} = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}.$$

10. La topología $\mathcal{T}_{\rightarrow}$ sobre $\mathbb{R}$. Es la que tiene por base

$$\mathcal{B}_{\rightarrow} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}.$$

11. La topología *usual* sobre $\mathbb{R}^n$, $n > 0$. $\mathcal{T}_u$ es la que tiene por base

$$\mathcal{B}_u = \{B_\varepsilon(x) : x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ con } \varepsilon > 0\},$$

donde $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : ||x-y|| < \varepsilon\}$.
(Esta topología coincide con la del ejemplo 6, si $n = 1$.)

12. La topología del *orden* $\mathcal{T}_<$ sobre X, donde $(X,<)$ es un conjunto totalmente ordenado.

12.1 Si X no tiene ni máximo ni mínimo $\mathcal{T}_<$ es la topología que tiene por base

$$\mathcal{B}_< = \{(a,b)\colon a,b \in X \text{ con } a<b\}.$$

($\mathcal{T}_< = \mathcal{T}_u$ si $(X,<)$ es la recta real.)

12.2 Si $max\, X = b_0$ pero X no tiene mínimo. $\mathcal{T}_<$ es la topología que tiene por base

$$\mathcal{B}_< = \{(a,b)\colon a,b \in X \text{ con } a<b\} \cup \{(a,b_0]\colon a \in X\}.$$

12.3 Si $min\, X = a_0$ pero X no tiene máximo. $\mathcal{T}_<$ es la topología que tiene por base

$$\mathcal{B}_< = \{(a,b)\colon a,b \in X \text{ con } a<b\} \cup \{[a_0,b)\colon b \in X\}.$$

12.4 Si $min\, X = a_0$ y $max\, X = b_0$. $\mathcal{T}_<$ es la topología que tiene por base

$$\mathcal{B}_< = \{(a,b)\colon a,b \in X \text{ con } a<b\} \cup \{[a_0,b)\colon b \in X\} \cup \{(a,b_0]\colon a \in X\}.$$

13. La topología $\mathcal{T}_d$ inducida por una métrica en X, donde (X,d) es un espacio métrico es la que tiene como base

$$\mathcal{B}_d = \{B^d_\varepsilon(x)\colon x \in X, \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ con } \varepsilon > 0\},$$

donde $B^d_\varepsilon(x) = \{y \in X\colon d(x,y) < \varepsilon\}$.

14. La topología de *subespacio*. Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $A \subset X$. La topología sobre A *inducida* o *heredada* de la de X o de *subespacio* es

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A\colon U \in \mathcal{T}\}.$$

15. La topología *producto*. Sean $(X,\mathcal{T}_1)$ e $(Y,\mathcal{T}_2)$ espacios topológicos. La *topología producto* $\mathcal{T}_{prod}$ sobre $X \times Y$ es la que tiene por base

$$\mathcal{B} = \{U \times V\colon U \in \mathcal{T}_1 \text{ y } V \in \mathcal{T}_2\}.$$

Si $\mathcal{B}_1$ es base de $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{B}_2$ es base de $\mathcal{T}_2$ la *base producto* de la topología producto sobre $X \times Y$ es

$$\mathcal{B}_{prod} = \{B_1 \times B_2\colon B_1 \in \mathcal{B}_1 \text{ y } B_2 \in \mathcal{B}_2\}.$$

16. La topología *cociente*. Sean $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico, Y un conjunto y $p\colon X \to Y$ una función sobreyectiva. La *topología cociente* sobre Y es la topología más fina que hace p continua. Es decir,

$$V \text{ es abierto de } Y \text{ (con la topología cociente)} \quad \Longleftrightarrow \quad p^{-1}(V) \in \mathcal{T}.$$