Universidad Autónoma de Madrid | Curso 2008-09

TOPOLOGÍA | 17 de abril 2009

EXAMEN PARCIAL

1.-[2 puntos]

(1.1) Define "$\mathcal{T}$ es un topología sobre un conjunto X".

(1.2) Dado un espacio topológico X y $A \subset X$. Define "el interior de A".

(1.3) Dado un espacio topológico X y $A \subset X$. Define "la adherencia de A".

2.-[2 puntos] Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(2.1) en $\mathbb{R}$ con la topología cofinita, todo subconjunto A de $\mathbb{R}$ distinto de $\mathbb{R}$ tiene $Int(A) = \emptyset$;

(2.2) la topología usual es más fina que la topología $\mathcal{T}_{[\,)}$ sobre $\mathbb{R}$;

(2.3) si $f\colon X \to Y$ es una función continua y A es abierto de X entonces $f(A)$ es abierto de Y, y

(2.4) $\overline{A \cap D} = \overline{A} \cap \overline{D}$.

3.-[2 puntos]

(3.1) Sea Y un conjunto e $y \in Y$. Demuestra que $\mathcal{T}_y = \{U \subset Y \mid y \in U\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología sobre Y.

(3.2) Sea X un conjunto con al menos 4 elementos. Sean $c, d \in X$ con $c \neq d$. Demuestra que la topología producto de $(X, \mathcal{T}_c)$ y $(X, \mathcal{T}_d)$ es menos fina que la topología $\mathcal{T}_{(c,d)}$ sobre $X \times X$. ¿Son estas dos topologías iguales? ($\mathcal{T}_c$, $\mathcal{T}_d$ y $\mathcal{T}_{(c,d)}$ definidas como en el apartado (3.1)).

4.-[2 puntos] Sea $f\colon X \to Y$ una función inyectiva y continua. Demuestra que si Y es Hausdorff entonces X es Hausdorff.

5.-[2 puntos] En $X = \mathbb{R}$ con la topología usual se define la siguiente relación de equivalencia:

$$x \equiv y \quad \text{si y solamente si} \quad \left\{ \begin{array}{c} x = y \\ \text{ó} \\ x, y \in (0,1) \end{array} \right.$$

¿Es el espacio cociente X^* un espacio Hausdorff?.