*III.1 Homotopía de caminos. El grupo fundamental*

Un *grupo* es un conjunto $G$ junto con una operación $*\colon G\times G\to G\colon (a,b)\mapsto a*b$ que verifica:

(G1) (asociatividad) $\forall\, x,y,z\in G$, $x*(y*z)=(x*y)*z$;

(G2) (existencia de neutro o unidad) existe un elemento $e\in G$ tal que $\forall\, x\in G$, $x*e=e*x=x$;

(G3) (existencia de opuestos o inversos) $\forall\, x\in G\,\exists\, y\in G$ tal que $x*y=y*x=e$ (tal $y$ se denota por "$-x$" o por "$x^{-1}$" dependiendo de la operación).

**1.** Comprueba si los siguientes conjuntos con la operaciones indicadas son grupos:
a) $(\mathbb{Z},+)$; b) $(\mathbb{Z},\cdot)$; c) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$; d) $(\mathbb{Q},+)$; e) $(\mathbb{Q},\cdot)$; f) $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$; g) $(\mathbb{C}^*,\cdot)$; h) $(\mathbb{R}^+,\cdot)$;
i) $(GL_n(\mathbb{R}),\cdot)$; j) $(V,+)$; k) $(Biy(X),\circ)$.
Donde $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es el conjunto de enteros módulo $n$ con $n>1$; $\mathbb{K}^*=\mathbb{K}\setminus\{0\}$; $GL_n(\mathbb{R})$ es el conjunto de matrices cuadradas de orden $n$ y determinante no nulo; $V$ es un espacio vectorial; $Biy(X)$ es el conjunto de biyecciones de un conjunto no vacío $X$ (la operación es la composición de biyecciones).

Un *homomorfismo* del grupo $(G_1,*_1)$ en el grupo $(G_2,*_2)$ es una aplicación $f\colon G_1\to G_2$ tal que

$$\forall\, x,y\in G_1\ f(x*_1 y)=f(x)*_2 f(y).$$

Un homomorfismo de grupos se llama *isomorfismo* si además es una aplicación biyectiva.

**2.** Comprueba que si $f\colon G_1\to G_2$ es un homomorfismo de grupos entonces $f(e_1)=e_2$, donde $e_1$ y $e_2$ son los neutros de $G_1$ y $G_2$ respectivamente.

**3.** Comprueba si las siguientes aplicaciones son homomorfismos de grupos, y en caso positivo comprueba si son además isomorfismos:
(i) $f_1\colon(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{Q}^*,\cdot):m\mapsto 2^m$;
(ii) $f_2:(GL_n(\mathbb{R}),\cdot)\to(GL_n(\mathbb{R}),\cdot):A\mapsto A^2$;
(iii) $f_3\colon(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{Z},+):m\mapsto 6m$;
(iv) $f_4\colon(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}^*,\cdot)\colon x\mapsto exp(x)$;
(v) $f_5\colon(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}^+,\cdot)\colon x\mapsto exp(x)$.

**4.** Sean $(G_1,*_1)$ y $(G_2,*_2)$ dos grupos. En el conjunto $G_1\times G_2$ se considera la operación

$$(a_1,a_2)*(b_1,b_2)\colon=(a_1*_1 b_1,a_2*_2 b_2).$$

Comprueba que $G_1\times G_2$ con esta operación es un grupo (se llama *producto directo* de $G_1$ por $G_2$). Define de forma análoga $G_2\times G_1$ y demuestra que $G_1\times G_2$ es isomorfo a $G_2\times G_1$.

**5.** Ana y Berta salen a dar un paseo de una hora. Las dos hacen el mismo recorrido y salen al mismo tiempo, pero Berta va al doble de la velocidad a la que va Ana (que va siempre a una velocidad constante). Al cabo de 20 minutos Berta se da cuenta que ha dejado a Ana atrás y vuelve, pero a una velocidad la mitad de la llevaba antes. Cuando se encuentran, las dos toman el sentido original, y van caminando al paso de Ana hasta terminar el paseo. Sea $\alpha$ el paseo de Ana y $\beta$ el de Berta. Define $\beta$ en función de $\alpha$.

**6.** Sean $\alpha,\beta\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2$ los siguientes caminos $\alpha(t):=t(1,1)$ y $\beta(t):=(t+1,(t+1)^2)$. Define el camino $\alpha*\beta$.

**7.** Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico, sea $\alpha$ un camino en $X$ de $x_0$ a $x_1$.
(i) Demuestra que $\alpha*c_{x_1}\sim\alpha$.
(i) Demuestra que $\bar{\alpha}*\alpha\sim c_{x_1}$.

**8.** Sean $(X,\mathcal{T}_1)$ y $(Y,\mathcal{T}_2)$ espacios topológicos. Sea $\alpha$ un camino en $X$ de $x_0$ a $x_1$ y sea $\beta$ un camino en $X$ de $x_1$ a $x_2$. Sea $f\colon X\to Y$ una función continua. Demuestra que $f\circ(\alpha*\beta)=(f\circ\alpha)*(f\circ\beta)$

**9.** Para cada $n\geq 1$ sea $\omega_n\colon[0,1]\to\mathbb{S}^1\colon s\mapsto(cos\,2\pi ns,sen\,2\pi ns)$. Demuestra que $\omega_3\sim\omega_1*(\omega_1*\omega_1)$.