Universidad Autónoma de Madrid | Curso 2009-10

TOPOLOGÍA | Hoja de ejercicios 8

II.3 Axiomas de numerabilidad. Espacios separables.

1. Si un espacio es IAN con cierta topología, ¿lo es necesariamente con una menos fina?, ¿y con una más fina?.

2. Si un espacio es IIAN con cierta topología, ¿lo es necesariamente con una menos fina?, ¿y con una más fina?.

3. Se considera el espacio $(X, \mathcal{T}_{cofinita})$. ¿Es un espacio separable?

4. Sea X un espacio IAN. Sean $A \subset X$ y $x \in X$. Demuestra lo siguiente:
(i) $x \in Fr(A)$ si y solamente si existen $(x_n)_{n>0} \subset A$ y $(y_n)_{n>0} \subset X \setminus A$ ambas con límite x.
(ii) $x \in A'$ si y solamente si existe $(x_n)_{n>0} \subset A$ con $x_n \neq x$ para todo $n > 0$ y con límite x.

II.4 Axiomas de separación. Regularidad. Normalidad.

5. Sea X un espacio T_1 (los puntos son cerrados). Demuestra que X normal implica X regular y que X regular implica X Hausdorff.

6. Sea X un espacio de Hausdorff.
(i) Sean $K \subset X$ compacto y $a \in X$ con $a \notin K$. Demuestra que existen U entorno abierto de a y V abierto conteniendo a K disjuntos.
(ii) Sean $K_1, K_2 \subset X$ dos compactos disjuntos. Demuestra que existen abiertos disjuntos U_1, U_2 con $K_1 \subset U_1$ y $K_2 \subset U_2$.
(iii) Demuestra que si X es compacto entonces X es un espacio normal.