Universidad Autónoma de Madrid — Curso 2009-10

TOPOLOGÍA — Hoja de ejercicios 7

II.2 Compacidad. Compactos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$. Compacidad y completitud en espacios métricos.

1. Estudia si los siguientes conjuntos son compactos en los espacios que se indican.
(i) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}$;
(ii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;
(iii) $[0,1] \subset \mathbb{R}$ con la topología del límite inferior $\mathcal{T}_{[\,)}$ y
(iv) $[0,1] \times \{3\} \subset \mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico.

2. Si $A \subset X$ es un conjunto finito de puntos, ¿es compacto cualquiera que sea la topología en X?

3. Si un espacio es compacto con cierta topología, ¿lo es necesariamente con una menos fina?, ¿y con una más fina?.

4. Sea $A \subset X$ y supongamos que la topología heredada por A es la discreta. Dar una condición necesaria y suficiente sencilla para la compacidad de A.

5. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
(i) La unión finita de subconjuntos compactos de un espacio es un subconjunto compacto.
(ii) La unión de una familia cualquiera de compactos de un espacio es un subconjunto compacto.
(iii) La intersección de una familia cualquiera de compactos es un subconjunto compacto.
(Indicación: considera en $[0,1]$ la topología cuya base es $\mathcal{B} = \{(a,b) : 0 < a < b < 1\} \cup \{(0,1]\} \cup \{[0,1)\}$.)
(iv) La intersección de una familia de compactos de un espacio de Hausdorff es un subconjunto compacto.

6. Prueba que si X es un espacio compacto y $A \subset X$ entonces $\overline{A}$ es compacto. Demuestra también que $\mathcal{B} = \{\{0,n\} : n \in \mathbb{Z}\}$ es base para una topología sobre $\mathbb{Z}$ en la que $A = \{0\}$ es compacto pero $\overline{A}$ no lo es. ¿Contradice esto lo anterior?.

7. Demostrar que si $f : X \to Y$ es continua, Y es Hausdorff y X es compacto, entonces f es cerrada.

8. Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Prueba que la función distancia está acotada.

9. Sea (X,d) un espacio métrico y $K \subset X$ un conjunto compacto. Demostrar que la función

$$d(x,K) = \inf\{d(x,y) : y \in K\}$$

es continua y que para cada $x \in X$ existe $y \in K$ tal que $d(x,K) = d(x,y)$.

10. Sean $X_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $X_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Demostrar que X_1 es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ y que X_1 y X_2 no son homeomorfos.

11. Demostrar que $\mathbb{R}^2$ y S^2 no son homeomorfos.

12. Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2,\ x, y \in [-1,1]\}$, con la topología usual. ¿Existe alguna función continua y sobreyectiva de X en $\mathbb{R}$?.

13. Demostrar que si Y es compacto entonces $p_1 : X \times Y \to X$ es cerrada.
(Indicación: Si A es cerrado y $x \notin p_1(A)$, hallamos un "tubo" $T = U_x \times Y$ tal que $T \cap A = \emptyset$.)
Dar un ejemplo de un conjunto no compacto en $\mathbb{R}^2$ cuyas proyecciones sean compactas.

14. Sea X un espacio topológico e Y un espacio de Hausdorff compacto. Probar que $f : X \to Y$ es continua si y sólo si la gráfica de f, Γ_f, es cerrada en $X \times Y$. Si X es también un espacio de Hausdorff compacto, entonces f es continua si y sólo si Γ_f es compacta.
(Indicación: La clave de la demostración está en probar que $f^{-1}(C) = p_1\big((X \times C) \cap \Gamma_f\big)$ para todo C cerrado de Y y luego basta usar el ejercicio anterior.)