

II.1 Conexión. Conexión por caminos. Conexos de \mathbb{R} .

1. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio conexo. Sea \mathcal{T}' otra topología sobre X . Si \mathcal{T}' es menos fina que \mathcal{T} , ¿es (X, \mathcal{T}') conexo?, ¿y si \mathcal{T}' es más fina que \mathcal{T} ?
2. ¿Existe algún subconjunto A de \mathbb{R}^2 tal que ni A ni su complementario sean conexos?
3. Sea A es un subconjunto conexo de un espacio topológico. ¿Son $\text{Int } A$ o $\text{Fr } A$ conexos?
4. Demuestra que si A es un subconjunto conexo de un espacio topológico X y D es un subconjunto de X tal que $A \subset D \subset \bar{A}$, entonces D es conexo.
5. Estudia si $X = [0, 1] \times [0, 1]$ es conexo con: (i) la topología del orden lexicográfico en X y (ii) la topología heredad de \mathbb{R}^2 con el orden lexicográfico.
6. Sean A_1, A_2, \dots, A_n subconjuntos conexos de un espacio topológico tales que $A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset$ para todo $1 \leq k < n$. Prueba que $\bigcup_{k=1}^n A_k$ es conexo. Trata de generalizar el resultado para una colección numerable de conexos.
7. Sean A y D dos conjuntos cerrados no vacíos de un espacio topológico X . Demuestra que si $A \cup D$ y $A \cap D$ son conexos entonces A y D también lo son. ¿Qué pasa si A ó D no son cerrados?
8. Demuestra que: $X \times Y$ es conexo si y solamente si X e Y son conexos.
9. Demuestra que si A es numerable entonces $\mathbb{R}^2 \setminus A$ es conexo por caminos. (Indicación: El conjunto de rectas que pasan por un punto no es numerable.)
10. Prueba que si $f: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo entonces, para cualesquiera $x_1, \dots, x_n \in X$, $X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ y $Y \setminus \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ también son homeomorfos. Aplica lo anterior para demostrar que los subconjuntos de \mathbb{R} : $(1, 2)$, $[1, 2]$ y $[1, 2)$ no son homeomorfos.
11. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y que tiene n componentes conexas. Prueba que X tiene como mínimo n componentes conexas.
12. Demuestra que $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ no es homeomorfo a \mathbb{R} .
13. Sean $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (x - 1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (x + 1)^2 + y^2 = 1\}$ e $Y = \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$. ¿Existe alguna función continua y sobreyectiva de X en Y ?, ¿y si pedimos además que sea biyectiva?
14. ¿Son \mathbb{R}^1 y \mathbb{R}^2 homeomorfos?
15. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
 - (i) Si X es conexo por caminos y $f: X \rightarrow Y$ es una función continua y sobreyectiva entonces Y también es conexo por caminos.
 - (ii) Si A es un subconjunto conexo por caminos de un espacio topológico X y $A \subset D \subset \bar{A}$ entonces D es conexo por caminos.
 - (iii) Si $\mathcal{C} = \{C_i: i \in I\}$ es una colección de subconjuntos conexos por caminos de un espacio topológico X tal que existe $C_0 \in \mathcal{C}$ que interseca a cada elemento de \mathcal{C} , entonces $\bigcup_{i \in I} C_i$ es conexo por caminos.
16. Demuestra que todo subconjunto conexo de \mathbb{R}^n con más de un punto es no numerable.