Universidad Autónoma de Madrid — Curso 2009-10
TOPOLOGÍA — Hoja de ejercicios 5

I.7 Topología cociente.

1. Sea $p_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la proyección en el primer factor.

(i) Sea X el subespacio $(0 \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times 0)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sea g la restricción de p_1 a X. Demuestra que g es una aplicación cerrada pero que no es una aplicación abierta.

(ii) Sea Y el subespacio $(\overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times 0)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sea h la restricción de p_1 a Y. Demuestra que la aplicación h no es ni abierta ni cerrada, pero sí es una aplicación cociente. (Indicación: $h^{-1}(U) \cap (\mathbb{R} \times 0) = U \times 0$.)

2. Sea $p : X \to Y$ una aplicación y sea A un subespacio de X.

(i) Demuestra que si A es abierto en X y p es una aplicación abierta, entonces la restricción de p a A es una aplicación abierta

(ii) Concluye del apartado anterior que $p' : A \to p(A)\colon x \mapsto p'(x) := p(x)$ es una aplicación abierta.

(iii) Demuestra que si A y p son cerradas, la restricción de p a A es cerrada, luego la aplicación p' (del aparatado (ii)) lo es.

3. Se considera el plano $X = \mathbb{R}^2$.

(i) Definimos una relación de equivalencia sobre X:

$$(x_0, y_0) \equiv (x_1, y_1) \quad \text{si} \quad x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2.$$

Identifica el espacio topológico cociente X^* con alguno conocido.

(ii) Repite el apartado anterior para la siguiente relación de equivalencia

$$(x_0, y_0) \equiv (x_1, y_1) \quad \text{si} \quad x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2.$$

4. Sea Z el subespacio $(\mathbb{R} \times 0) \cup (0 \times \mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^2$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to Z$ la aplicación dada por $g(x, y) = (x, 0)$ si $x \neq 0$, y $g(0, y) = (0, y)$.

(i) Estudia si g es una aplicación continua, si es abierta y si es cerrada.

(ii) Demuestra que en la topología cociente inducida por g el espacio Z no es Hausdorff.

I.8 Espacios métricos.

5. En $\mathbb{R}^n$ se define

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

Demuestra que d_1 es una distancia en $\mathbb{R}^n$ y que induce la topología usual de $\mathbb{R}^n$. Dibuja los elementos de la base para $n = 2$.

6. Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $\mathcal{T}_d$ la topología inducida por la métrica d. Considera en $X \times X$ la topología producto de $\mathcal{T}_d$ por $\mathcal{T}_d$. Demuestra que la función distancia $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ es continua.

7. Demuestra que $d(x, y) = \min(|x - y|, 1 - |x - y|)$ define una distancia en $[0, 1)$. ¿Cuáles son las funciones $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ continuas en este espacio?

8. Demuestra que $\mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico es un espacio metrizable. (Indicación: Estudia la función $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$d(<x_1, x_2>, <y_1, y_2>) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{si } x_1 = y_1 \\ max\{1, |x_2 - y_2|\} & \text{si } x_1 \neq y_1, \end{cases}$$

y describe las ϵ-bolas con respecto a d, para $\epsilon \leq 1$.)